

Vektorianalyysi

Toinen luentoviikko, syksy 2010

Alla tiivistelmä toisen viikon aikana käsitellyistä asioista.

- *Avoin joukko* määriteltiin suljetun joukon komplementtina. Tarkemmin, joukko A on avoin, jos sen komplementti $\mathbb{R}^n \setminus A$ on suljettu. Huomaa, että koska koko avaruus \mathbb{R}^n on suljettu, niin tyhjä joukko on avoin.
- Avoimelle joukolle voidaan antaa myös havainnollisempi karakterisointi: joukko A on avoin jos ja vain jos jokaisella $x \in A$ on olemassa $\delta(x) > 0$ siten että avoin x -keskinen $\delta(x)$ -säteinen kuula $B_{\delta(x)}(x)$ sisältyy myös A :han. Yleisemmin, niitä mielivaltaisten joukon B pisteitä x , joille on olemassa $\delta(x) > 0$ siten että $B_{\delta(x)}(x) \subset B$ kutsutaan joukon B *sisäpisteiksi*. Joukko on siis avoin, jos ja vain jos sen jokainen piste on sisäpiste. Huomaa, että \mathbb{R}^n on siis myös avoin joukko, joten sen komplementti tyhjä joukko on suljettu.
- Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *reuna* ∂A on niiden pisteiden joukko jotka eivät ole A :n eivätkä sen komplementin $\mathbb{R}^n \setminus A$ sisäpisteitä. Lopuksi määrittelimme, että $K \subset \mathbb{R}^n$ on *kompakti*, mikäli se on rajoitettu ja suljettu.
- Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ jatkuvuus määritellään tavalliseen tapaan: f on jatkuva pisteessä $x \in A$, jos $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \rightarrow f(x)$ jokaisella A :n jonolla (x^k) , jolla $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$. Jatkuvilla funktioilla on Analyysin kursseilta tutut perusominaisuudet: erityisesti jatkuvien funktioiden (äärelliset) summat ja tulot ovat aina jatkuvia.
- Jos $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, ja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, niin määrittelemme funktion f osittaisderivaatan muuttujan x_k suhteen pisteessä $x \in D$ erotusosamäärän raja-arvona

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h = h_k e_k,$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa. Tässä e_k on k :s yksikkökoordinaatti vektori. Käytämme osittaisderivaatalle seuraavia vaihtoehtoisia merkintöjä

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad \partial_k f(x).$$

- Päinvastoin kuin yhdenmuuttujan tapauksessa, ei osittaisderivaattojen olemassaolosta yleisessä tilanteessa seuraa edes jatkuvuutta: esimerkiksi funktio

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x_1 = 0 \text{ tai } x_2 = 0, \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämä ei ole jatkuva origossa, mutta sillä on olemassa osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0.$$

- Saadaksemme paremman kontrollin funktion käytökselle sen derivaattojen avulla määrittelemme, että f on *differentioituva* pisteessä x , mikäli on olemassa reaaliarvoinen funktio $\varepsilon(x; h)$ siten, että kaikilla $h \in \mathbb{R}^n$ joilla on riittävän pieni normi, pätee

$$f(x + h) - f(x) = \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(x; h),$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x; h) = 0$ ja $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$ on f :n *gradientti* pisteessä x . Nyt pätee, että pisteessä x differentioituva funktio on aina myös jatkuva x :ssä.