Vektorianalyysi

Ensimmäinen luentoviikko, syksy 2010

Alla tiivistelmä ensimmäisen viikon aikana käsitellyistä asioista.

- Merkitään $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$. Tämä on *$n$-ulotteinen euklidinen avaruus*. Luvut x_i ovat vektorin x koordinaatteja. Kahden vektorin $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *summa* on

  $$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

  Jos $\alpha \in \mathbb{R}$, määrittelemme edelleen

  $$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

- Kahden vektorin x ja y välinen *skalaaritulo* määritellään asettamalla

  $$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

  Tällä on seuraavat ominaisuudet:

  $$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \text{(Kommutatiivisuus)}$$

  $$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

  $$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \text{(Osittelulait)}$$

  Keskeinen sisätulolle pätevä epäyhtälö on *Cauchy-Schwarzin epäyhtälö*:

  $$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

- Vektorin $x \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli *pituus* määritellään asettamlla

  $$\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}.$$

  Olennaista on että tämä normi on sisätulon määräämä: $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Normilla on seuraavat ominaisuudet:

  $$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \text{ jos ja vain jos } x = 0.$$

  $$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

  $$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{Kolmioepäyhtälö.}$$

- Seuraavaksi määrittelemme jonojen konvergenssin. Tarkastellaan jonoa $\mathbb{R}^n$:n vektoreita $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Määrittelemme

$$x = \lim_{k\to\infty} x^k, \quad \text{jos} \quad \lim_{k\to\infty} \|x - x^k\| = 0.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa että koordinaatti–jonot suppenevat:

$$x = \lim_{k\to\infty} x^k \quad \text{jos ja vain jos } x_p = \lim_{k\to\infty} x_p^k,\ p = 1, \ldots, n.$$

- Avoin x–keskinen r–säteinen pallo on

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|x - y\| < r\}.$$

Suljettu x–keskinen r–säteinen pallo on vastaavasti

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|x - y\| \leq r\}.$$

Merkitään edelleen pallonkuorta

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|x - y\| = r\}.$$

- Viimeinen asia, jonka käsittelimme oli suljetun joukon määritelmä. Joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos siitä että

$$x = \lim_{k\to\infty} x^k, \quad x^k \in F \text{ kaikilla } k$$

seuraa aina että $x \in F$. Joukko on siis suljettu, jos suppenevat jonot eivät vie sieltä ulos.