Vektorianalyysi

Harjoitus 9, syksy 2010

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Oletetaan, että jollain vakiolla $C > 0$ pätee $0 \leq f(x) \leq C|x|^a$ kaikilla $x > 0$. Määritä ne reaaliset a:n arvot, joilla epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

   on olemassa. **Ratk**. Kun $a < 1$, muulloin ei välttämättä konvergoi.

2. Kuten edellinen tehtvävä, mutta nyt tukittava integraalia

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

   Ratk. Kun $a > 1$, muulloin ei välttämättä konvergoi.

Laskaritehtävät.

1. ([Martio, 3.4:1]) Millä suoralla sylinterillä, jonka tilavuus on $V > 0$ on pienin vaipan ja pohjan yhteenlaskettu pinta–ala?

2. ([Martio, 3.4:2]) Määritä funktion $f(x, y) = xy$ maksimiarvo joukossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 2x + y = 4\}$?

3. ([Martio, 3.4:3], melkein) Mitkä ovat sen $\mathbb{R}^3$:n suorakulmion mitat, jolla on tilavuus $V > 0$, ja pienin mahdollinen pinta–ala.

4. ([Martio, 3.4:4]) Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2},$$

suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.

5. Olkoon $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Laske integraali

$$\int_D (x^2 + xy)\, dxdy.$$

6. Olkoon D kuten yllä. Laske integraali

$$\int_D y^2 e^{xy}\, dxdy.$$