# Vektorianalyysi

Harjoitus 7, syksy 2010

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

**Lämmittelytehtävät.** Näissä tehtävissä on tarkoitus kerrata suorien ja tasojen teoriaa.

1. Määrää vektorin $(1, 2)$ suuntaisen pisteen $(1, 0)$ kautta kulkevan suoran yhtälö muodossa $ax + by + c = 0$. **Ratk.**: $y = 2x - 2$.
2. Tarkastellan tasoa, joka kulkee pisteen $(1, 0, 1)$ kautta, ja joka on vektorien $(1, 1, 0)$ ja $(0, 1, 1)$ määräämä. Kirjoita tämän yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$ **Ratk.**: $x - y + z = 2$.

**Laskaritehtävät.**

1. Määrää polun $\gamma(t) = (\sin(t), \sin(t^2))$, $t > 0$, tangentti pisteessä $t = \pi$.
2. ([Martio; h. 3.1:1]) Olkoon $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Osoita, että kaikilla $t$ vektorit $\gamma(t)$ ja $\gamma'(t)$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja että $\gamma''(t)$ on vastakkaissuuntainen vektoriin $\gamma(t)$ nähden.
3. ([Martio; h. 3.1:2]) Olkoon $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ polku, jolle kaikilla $t > 0$ pätee
$$\gamma''(t) = (0, 0, -1).$$
Oletetaan vielä että
$$\gamma(0) = (0, 0, 2),\ \gamma'(0) = (1, 1, 0).$$
Määritä $\gamma$. Millä arvolla $t > 0$ polkuu leikkaa ensimmäisen kerran $xy$–tasoa, ja missä pisteessä se tapahtuu?

4. ([Martio: h. 3.2:1]) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Jatkuvan funktion $f : D \to \mathbb{R}$ graafi (eli kuvaaja) voidaan esittää pintana $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Jos $f \in C^1(D)$, niin määritä tämän pinnan tangenttitason normaali pisteessä $r(x, y)$. Sovellla tätä tapaukseen $f(x, y) = xy + x$ pisteessä $(0, 0)$. Mikä on tangenttitason yhtälö tässä tapauksessa?

5. Olkoon nyt edellisen tehtävän merkinnöin $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$. Määritä pisteesen $(x, y, f(x, y))$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

6. Edelleen samoin merkinnöin kuin edellä, olkoon $f(x, y) = 1/xy$, $xy \neq 0$. Määritä pisteeseen $(2, 1, 1/2)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.