

# Vektorianalyysi

Harjoitus 6, syksy 2010

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitettu käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa tai luennoilla neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

## Lämmittelytehtävät.

1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot.

**Ratk.**  $\pm\sqrt{10}$ .

2. Laske funktion  $g(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , origossa muodostetun Taylorin kehitelmän neljä ensimmäistä termiä.

**Ratk.** Neljän ensimmäisen termin summa on  $x_1 x_2 - x_1^3 x_2^3 / 3!$ .

## Laskaritehtävät.

Määritä seuraavien kolmen funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kriittiset pisteet, ja mahdollisten lokaalien ääriarvokohtien laatu. **Vihje:** Mieti tarkkaan funktion käytöstä kriittisten pisteiden ympäristössä. Hessen matriisista ei välttämättä ole apua.

1.  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .
2.  $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$ .
3.  $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1 + x_2)$ .

4. Määritä funktion

$$g(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2} - \lambda(x_1^2 + x_2^2)$$

kriittiset pisteet ja mahdolliset lokaalit ääriarvot reaalisen vakion  $\lambda$  eri arvoilla.

5. (Viimeinen välikoetehtävä vielä kerran) Olkoon  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2} + e^{x_2^2} - (x_1 - x_2)^2.$$

Määrää funktion  $f$  kriittiset pisteet, mahdolliset lokaalit ääriarvot ja niiden laatu.

6. Olkoon  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(x_1, x_2) = (4 - x_1^2 - x_2^2) e^{x_1 - x_2}.$$

Määrää funktion  $h$  kriittiset pisteet, mahdolliset lokaalit ääriarvot ja niiden laatu.