

Vektorianalyysi

Harjoitus 3, syksy 2010

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitettu käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit tuki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Laske funktion $f(x) = x_1^3 \cos(x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, gradientti.

Ratk. $\nabla f(x) = (3x_1^2 \cos(x_2), -x_1^3 \sin(x_2)).$

2. Laske funktion $g(x) = x_1^4 \cos(x_2^2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, gradientti.

Ratk. $\nabla g(x) = (4x_1^3 \cos(x_2^2), -2x_1^4 x_2 \sin(x_2^2)).$

3. Laske funktion

$$h(x) = \frac{x_1^3 \cos(x_2)}{\sin(x_3)}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_3 \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gradientti.

Ratk.

$$\nabla h(x) = \left(\frac{3x_1^2 \cos(x_2)}{\sin(x_3)}, \frac{-x_1^3 \sin(x_2)}{\sin(x_3)}, \frac{-x_1^3 \cos(x_2) \cos(x_3)}{\sin^2(x_3)} \right).$$

Laskaritehtävät.

1. ([Martio, h.2.4:1]) Määritä funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^{\|x\|},$$

gradientti.

2. ([Martio, h. 2.4:2]) Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x_1^3/||x||, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

on differentioituva origossa.

3. ([Martio, h. 2.4:3]) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ja $\nabla f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että f on vakiofunktio.
4. ([Martio, h. 2.7:1]). Osoita, että suunnatulle derivaatalle pätee $\partial_{-v}f(x) = -\partial_v f(x)$.
5. ([Martio, h.2.7:2]) Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva funktio, joka on parillinen, eli $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\nabla f(-x) = -\nabla f(x)$. Määritä tällöin $\nabla f(0)$.
6. ([Martio, h. 2.7:3]) Maaston korkeus pisteessä (x, y) on

$$h(x, y) = \frac{10}{3 + x^2 + 2y^2}.$$

Pisteen $(3, 2)$ kautta kulkee puro. Määritä puron suunta tässä pisteessä.