Vektorianalyysi

Harjoitus 2, syksy 2010

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Laske funktion $f(x) = x^3 \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, derivaatta.

   Ratk. $f'(x) = 3x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)$.

2. Laske funktion $g(x) = x^3 \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, derivaatta.

   Ratk. $g'(x) = 3x^2 \cos(x^2) - 2x^4 \sin(x^2)$.

3. Laske funktion

   $$h(x) = \frac{x^3 \cos(x)}{\sin(x)},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

   derivaatta.

   Ratk.

   $$h'(x) = \frac{3x^2 \cos x}{\sin x} - \frac{x^3}{\sin^2(x)}.$$

Laskaritehtävät.

1. ([Martio, h.2.1:2]) Olkoon

   $$f(x) = e^{\|x\|},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

   Luonnostele f: n kuvaaja. Mitä voit sanoa funktion f arvoista joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \ln 2)$?

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2}{x_1^4 + x_2^2}.$$

Osoita, että funktiolla f ei ole raja–arvoa origossa.

3. ([Martio, h. 2.2:3]) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Mitä tarkoitetaan kun sanotaan, että f:llä on raja–arvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa? Onko edellisen tehtävän funktiolla tämä ominaisuus?

4. ([Martio, h. 2.2:4]) Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Onko g:llä raja–arvoa origossa?

5. ([Martio, h. 2.3:2]) Muodosta funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1) + \cos^2(x_2)$, osittaisderivaatat $\partial_1 f$ ja $\partial_2 f$.

6. ([Martio, h. 2.3:3]). Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla $\partial_1 f(x_1, x_2) = 0$ kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, mutta joka ei ole jatkuva.