

Vektorianalyysi

Harjoitus 11, syksy 2010

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitettu käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät. Tällä kertaa ei ole lämmittelytehtäviä.

Laskaritehtävät.

1. Olkoon A sylinteri $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$. Laske integraali

$$\int_A z(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

2. Määritä ellipsoidin $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$ tilavuus. Tässä a , b ja c ovat positiivisia vakioita. **Vihje: Käytä sopivaa muuttujanvaihtoa!**
3. Luen ensin Martion kirjasta esimerkki 5.2.2, jossa käsitellään napakoordinaatit \mathbb{R}^3 :ssa. Laske tämän jälkeen integraali

$$\int_A \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

kun A on rengasalue $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2\}$.

4. Olkoon γ tason käyrä jolla on esitys $\gamma(x) = (x, x^2)$, $|x| \leq 1$. Laske integraali

$$\int_{\gamma} \frac{y}{x} dS.$$

5. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Laske integraali

$$\int_A \partial_y f \, dx dy,$$

kun $f(x, y) = x^2 y^2$.

6. Laskettava

$$\int_{\partial E} \langle n, f \rangle \, dS,$$

kun $f(x, y) = (x + y^3, x^3 + y^3)$ ja E on ellipsi $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$. Tässä a ja b ovat positiivisia vakioita.