

Vektorianalyysi

Harjoitus 10, syksy 2010

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitettu käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Laske integraali

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Ratk. $\pi/4$.

2. Laske integraali

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}.$$

Ratk. $\ln(2e/(1+e))$.

Laskaritehtävät.

1. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. Määritä integraali

$$\int_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$$

2. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Määritä integraali

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

3. Olkoon $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; t^2 \leq x^2 + y^2 \leq k^2 t^2\}$, missä $t > 0$ ja $k > 1$.
Osoita, että integraalin

$$\int_{A_t} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

arvo ei riipu t :stä.

4. Olkoon D joukko, jota rajoittavat x -akseli ja suorat $x = 1$ ja $y = x$.
Määritä integraali

$$\int_D x dx dy.$$

Vihje: Voit integroida sopivan funktion tasa-arvokäyrien avulla.

5. Olkoon $f(x, y) = \max(x, y)$, ja $D = [0, 1]^2$ tason yksikköneliö. Määritä
integraali

$$\int_D f^2 dx dy.$$

6. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dx dy}{x^2 y^2}.$$