Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi (Syksy 2010)
Harjoitus 2
Ratkaisuja (Jussi Martin)

1. ([Martio; h. 2.1:2]) Olkoon

$$f(x) = e^{\|x\|}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Luonnostele f:n kuvaaja. Mitä voit sanoa funktion f arvoista joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \ln 2)$?

Ratkaisu:
Eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ tiedetään aiempien analyysin kurssien perusteella aidosti kasvavaksi. Joukkon $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \ln 2)$ puolestaan tiedetään olevan täsmälleen se joukko missä $\|x\| \geq \ln 2$. Näin ollen, funktio $f(x) = e^{\|x\|}$ saa joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \ln 2)$ kaikki arvot väliltä $[2, \infty)$, koska $e^{\ln 2} = 2$. Nähdään myös, että kaikilla $c \in [2, \infty)$ funktio f saa vakioarvon c pallonkuorella $S(0, \ln c)$. (Kuva funktion f kuvaajasta löytyy viimeiseltä sivulta.)

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2}{x_1^4 + x_2^2}.$$

Osoita, että funktiolla f ei ole raja–arvoa origossa.

Ratkaisu:
Valitaan jono $y^k = (1/k, 1/k^2)$, tällöin $\lim_{k\to\infty} y^k = (0,0)$ ja

$$\begin{aligned} f(y^k) &= \frac{2/k^2 \cdot 1/k^2 + 1/k^2 \cdot 1/k^4}{1/k^4 + 1/k^4} = \frac{2/k^4 + 1/k^6}{2/k^4} \\ &= \Big(\frac{2k^2+1}{k^6}\Big) \Big/ \Big(\frac{2}{k^4}\Big) = \frac{2k^2+1}{2k^2}, \end{aligned}$$

joten $\lim_{k\to\infty} f(y^k) = 1$.

Toisaalta, jos valitaankin $y^k = (1/k, 0)$ niin $\lim_{k\to\infty} y^k = (0,0)$, mutta

$$\lim_{k\to\infty} f(y^k) = \frac{2/k^2 \cdot 0 + 1/k^2 \cdot 0}{1/k^4 + 0} = 0;$$

eikä funktiolla f näin ollen voi olla olemassa raja–arvoa origossa.

3. ([Martio; h. 2.2:3]) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Mitä tarkoitetaan kun sanotaan, että f:llä on raja–arvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa? Onko edellisen tehtävän funktiolla edellä kuvattu ominaisuus?

Ratkaisu:
Sillä, että f:llä on raja–arvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa tarkoitetaan tietysti sitä, että raja–arvo $\lim_{x\to 0} f|_L(x_1, x_2)$ on olemassa kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla L. Toisin sanoen, jos $v = (v_1, v_2)$ on mikä tahansa vektori joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, niin raja–arvo

$$\lim_{t\to 0} f(tv_1, tv_2)$$

on olemassa.

Näin määritelty raja–arvo on riippumaton suoralla L olevan vektorin $v \neq (0,0)$ valinnasta, sillä jos $v' \neq (0,0)$ on jokin vektori jolla $v' = av$ jollakin $a \in \mathbb{R} \setminus 0$, niin

$$\lim_{t\to 0} f(tv_1', v_2') = \lim_{t\to 0} f(tav_1, tav_2) = \lim_{s\to 0} f(sv_1, sv_2)$$

eli raja–arvot ovat samat.

Edellisen tehtävän funktiolla on kyseinen ominaisuus, sillä

$$|f(t,tc)| = \left|\frac{2ct^3 + c^2t^4}{t^4 + c^2t^2}\right| \leq \left|\frac{2ct^3 + c^2t^4}{c^2t^2}\right| \leq \left|\frac{2t}{c} + t^2\right|, \quad \text{kun} \quad c \neq 0;$$

mistä nähdään että raja–arvon on kaikilla muotoa $x_2 = cx_1$, $c \neq 0$ olevilla suorilla oltava nolla. Jäljelle jäävät ainoastaan akselien suuntaiset suorat, joilla puolestaan

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} f(t,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 \cdot 0 + t^2 \cdot 0}{t^4 + 0} = 0,\\
\lim_{t\to 0} f(0,t) &= \lim_{t\to 0} \frac{0 \cdot t + 0 \cdot t^2}{0 + t^2} = 0.
\end{aligned}$$

Raja–arvo on siis olemassa kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla.

4. ([Martio; h. 2.2:4]) Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Onko g:llä raja–arvoa origossa?

Ratkaisu:
Funktiolla g ei voi olla olemassa raja–arvoa origossa, sillä

$$\lim_{t\to 0} g(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - t^2}{t^2 + t^2} = 0,$$

mutta

$$\lim_{t\to 0} g(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1.$$

5. ([Martio; h. 2.3:2]) Muodosta funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sin^2(x_1) + \cos^2(x_2)$, osittaisderivaatat $\partial_1 f$ ja $\partial_2 f$.

Ratkaisu:
Käyttämällä ketjusääntöä ja muistamalla se, että muutuja jonka suhteen ei derivoida on derivoitaessa vakio, saadaan

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2\sin(x_1)\cos(x_1) \quad \text{ja} \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = -2\cos(x_2)\sin(x_2).$$

6. ([Martio; h. 2.3:3]) Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla $\partial_1 f(x_1, x_2) = 0$ kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, mutta joka ei ole jatkuva.

Ratkaisu:
Olkoon

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x_2 \geq 0,\\ 0, & \text{kun} \quad x_2 < 0. \end{cases}$$

Tällöin f ei ole jatkuva, mutta

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t} = \begin{cases} \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0, & \text{kun} \quad x_2 \geq 0,\\ \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0, & \text{kun} \quad x_2 < 0; \end{cases}$$

eli osittaisderivaatta $\partial_1 f(x_1, x_2)$ on määritelty kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja se saa arvon nolla kaikkialla $\mathbb{R}^2$:ssa.

Kuva tehtävään 1