Vektorianalyysi, syksy 2010
Harjoitus 4, Ratkaisuehdotukset
Anssi Mirka

Tehtävä 1. Koska funktion f koordinaattifunktiot e^{x_2} ja x_1x_2 ovat differentioituvia $\mathbb{R}^2$:ssa, niin myös funktio f on differentioituva $\mathbb{R}^2$:ssa (katso Tehtävä 2.). Näin ollen f:n derivaatalla, eli lineaarikuvauksella $f' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on esitysmatriisi

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Lasketaan siis tarvittavat osittaisderivaatat ja tehdään asiaankuuluvat sijoitukset. Koska

$$\partial_1 e^{x_2} = 0, \qquad \partial_2 e^{x_2} = e^{x_2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$
$$\partial_1(x_1x_2) = x_2, \qquad \partial_2(x_1x_2) = x_1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

niin saamme derivaatan esitysmatriisiksi

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{x_2} \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

.

Lopuksi sijoittamalla $(x_1, x_2) = (1, 1)$ saamme

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Tehtävä 2. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differentioituva pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$. Tällöin on olemassa lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jolla pätee

$$f(x+h) - f(x) = Lh + \|h\|e(h) \quad , h \in \mathbb{R}^2,$$

missä $e(h) \to 0, kun\ h \to 0$. Jos sama lauseke kirjoitetaan käyttäen komponenttiesityksiä $f = (f_1, f_2),\ L = (L_1, L_2),\ e = (e_1, e_2)$ saadaan

$$(f_1(x+h)-f_1(x), f_2(x+h)-f_2(x)) = (L_1h, L_2h)+(\|h\|e_1(h), \|h\|e_2(h)),$$

joka on yhtäpitävää sen kanssa, että yhtälö

$$f_i(x+h) - f_i(x) = L_ih + \|h\|e_i(h)$$

pätee molemmilla i:n arvoilla 1 ja 2. Nyt koska L on lineaarikuvaus, niin sen komponentit L_1 ja L_2 ovat lineaarikuvauksia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Lisäksi koska $e(h) \to 0$, kun $h \to 0$, niin sen komponenteille pätee $e_i(h) \to 0$, kun h. Näin ollen f:n molemmat komponentit täyttävät differentioituvuuden ehdot.

Oletetaan käänteisesti, että komponentit ovat differentioituvia arvolla $x \in \mathbb{R}^2$, eli on olemassa lineaarikuvaukset $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ joilla pätee

$$f_i(x+h) - f_i(x) = L_i h + \|h\| e_i(h), \; i = 1, 2 \quad h \in \mathbb{R}^2$$

missä $e_i(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Nyt erotus $f(x+h) - f(x)$ voidaan kirjoittaa komponenttien $f = (f_1, f_2)$ kautta muotoon

$$f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), f_2(x+h) - f_2(x)),$$

missä oikea puoli voidaan edellisen nojalla saattaa muotoon

$$(L_1 h, L_2 h) + (\|h\| e_1(h), \|h\| e_2(h)).$$

Koska L_1 ja L_2 ovat lineaarikuvauksia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, niin määrittelemällä kuvauksen $Lx = (L_1 x, L_2 x), x \in \mathbb{R}^2$ saamme lineaarikuvauksen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee

$$f(x+h) - f(x) = Lh + \|h\| e(h) \quad , h \in \mathbb{R}^2.$$

Tässä olemme määritelleet funktion $e(h) = (e_1(h), e_2(h))\, h \in \mathbb{R}^2$, ja tälle pätee $e(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Määritelmän mukaan funktio $f$on differentioituva pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$.

Tehtävä 3. Koska funktiot sin ja cos kuuluvat luokkaan $C^\infty(\mathbb{R})$, niin funktio $f(x,y) = \sin(x)\cos(xy), (x,y) \in \mathbb{R}^2$ kuuluu luokkaan $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ja täten määritettäviksi määrätyt osittaisderivaatat ovat olemassa(ja ovat jatkuvia) kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Siis lasketaan ne suoraviivaisesti:

$$\partial_2 f(x,y) = -x\sin(x)\sin(xy)$$
$$\partial_2\partial_2 f(x,y) = -x^2\sin(x)\cos(xy)$$
$$\partial_2\partial_2\partial_2 f(x,y) = x^3\sin(x)\sin(xy)$$
$$\partial_1\partial_2 f(x,y) = -\sin(x)\sin(xy) - x\cos(x)\sin(xy) - xy\sin(x)\cos(xy)$$

Tehtävä 4. Koska funktio $f(x,y) = x^3 - 3xy^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on polynomi, niin se kuuluu luokkaan $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ja näin ollen seuraavaksi esiintyvät derivaatat ovat jälleen olemassa kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y^2$$
$$\partial_1\partial_1 f(x,y) = 6x$$
$$\partial_2 f(x,y) = -6xy$$
$$\partial_2\partial_2 f(x,y) = -6x$$

Selvästi siis nähdään, että f toteuttaa yhtälön $\partial_1\partial_1 f(x,y) - \partial_2\partial_2 f(x,y) = 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, joten se on harmoninen koko tasossa.

Esimerkiksi funktio $g(x,y) = x^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ei ole harmoninen, sillä $\partial_1\partial_1 g(x,y) \equiv 2$, mutta $\partial_2\partial_2 g(x,y) \equiv 0$.

Tehtävä 5. Määritellään funktio $f(x,y) = g(x), (x,y) \in \mathbb{R}^2$, missä funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on epäjatkuva. Esimerkiksi voidaan ottaa vaikka $g(x) = 1$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja $g(x) = 0$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Funktiolle f pätee $\partial_2\partial_2 f(x,y) = 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, mutta se ei selvästi ole jatkuva missään pisteessä. (Suljetun joukon $\{1\}$ alkukuva $\{(x,y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}$ ei ole suljettu.)

Tehtävä 6. Määritellään ensin – selvästi luokkaan $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ kuuluva– apufunktio $g(x,y,z) = x + 2y + z + e^{2z} - 1, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Oletetaan siis, että on olemassa origon ympäristö $U \subset \mathbb{R}^2$ siten, että kun $(x,y) \in U$, niin yhtälön $x + 2y + z + e^{2z} = 1$ ratkaisu on olemassa ja voidaan esittää muodossa $z = f(x,y)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $g(x,y,f(x,y)) = 0$, kun $(x,y) \in U$. Jos nyt oletetaan, niinkuin tehtävässä implisiittisesti annetaan ymmärtää (ja voidaan todellakin todistaa), että funktio f on derivoituva origossa, niin myös funktio $(x,y) \mapsto g(x,y,f(x,y))$ on derivoituva origossa. Sijoitetaan ensin $(x,y) = (0,0)$ jolloin saadaan

$$f(0,0) + e^{2f(0,0)} = 1,$$

josta helposti ratkaistaan, että $f(0,0) = 0$, sillä reaaliarvoinen kuvaus $x \mapsto x + e^{2x}$ on aidosti kasvava, joten se saa arvon 1 täsmälleen silloin kun $x = 0$. Koska

$$\partial_2(x + 2y + f(x,y) + e^{2f(x,y)} - 1) = 2 + \partial_2 f(x,y) + 2\partial_2 f(x,y)e^{2f(x,y)},$$

niin $\partial_2 g(0,0,f(0,0)) = 2+3\partial_2 f(0,0) = 0$, josta saamme, että $\partial_2 f(0,0) = -\frac{2}{3}$

Aivan vastaavasti saamme, että $\partial_1 f(0,0) = -\frac{1}{3}$.

Viimeiseksi laskemme, että

$$\partial_1\partial_2 g(x,y,f(x,y)) = \partial_1(2 + \partial_2 f(x,y) + 2\partial_2 f(x,y)e^{2f(x,y)}),$$

jonka oikea puoli saa muodon

$$\partial_1\partial_2 f(x,y) + 2\partial_1\partial_2 f(x,y)e^{2f(x,y)} + 4\partial_1 f(x,y)\partial_2 f(x,y)e^{2f(x,y)}.$$

Sijoittamalla arvon $(x,y) = (0,0)$, saamme jo saavutettuja tuloksia käyttämällä, että $\partial_1\partial_2 f(0,0) = -\frac{8}{27}$.