Vektorianalyysi
Harjoitus 9, Ratkaisuehdotuksia
Anssi Mirka

Tehtävä 1. ([Martio, 3.4:1]) Millä suoralla sylinterillä, jonka tilavuus on $V_0 > 0$ on pienin vaipan ja pohjan yhteenlaskettu pinta-ala?

Ratkaisu 1. Merkitköön muutujat r ja h sylinterin pohjaympyrän sädettä ja korkeutta. Oletetaan, että nämä ovat suurempia kuin nolla. Vaipan ja pohjan yhteenlaskettu pinta-ala voidaan ilmaista funktiona $A : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi rh.$$

Tilavuus puolestaan voidaan esittää funktiona $V : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$V(r, h) = \pi r^2 h.$$

Meidän on siis minivoitava pinta-alafunktio A tasa-arvopinnalla $V(r, h) = V_0$. Tehdään tämä Lagrangen kertoimien avulla. Huomataan ensin, että $\nabla V(r, h) = (2\pi rh, \pi r^2) \neq 0$, kun r>0 ja h>0. Näin ollen rajoittumalla $f|_D$,missä $D = (0, \infty) \times (0, \infty)$, voi olla ääriarvoja vain sellaisissa pisteissä, joilla pätee jollakin lambdan reaaliarvolla, että

$$\begin{cases} \nabla A &= \lambda \nabla V \\ V(r, h) &= V_0 \end{cases}$$

Kun nämä lasketaan auki ja supistetaan ylimmästä puolittain kertoimet 2π, saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} r + h &= \lambda rh \\ 2r &= \lambda r^2 \\ \pi r^2 h &= V_0 \end{cases}$$

Toisesta yhtälöstä nähdään, sillä r>0, että $\lambda = 2/r$. Sijoitetaan tämä ensimmäiseen ja saadaan : $r = h$. Tätä käyttäen kolmas yhtälö tulee muotoon $\pi r^3 = V_0 \iff r = h = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$.

On periaatteessa mahdollista, että pinta-ala voisi saada ylläolevaa pienempiä arvoja tasa-arvopinnalla, kun $h \to \infty$ tai $r \to \infty$, vaikka ääriarvoja sillä ei tällöin voisi olla (sen ainut "kriittinen piste"etsittiin juuri yllä). Pelastamme tilanteen helposti huomioimalla, että jos $h \to \infty$, niin $r = \sqrt{\frac{V_0 \pi}{h}}$,ja $A \to \infty$. Vielä selvemmin: jos $r \to \infty$ niin $A \to \infty$.

Minimiä etsiessämme voimme siis rajoittua johonkin tarpeeksi suureen kompaktiin joukkoon, jonka reunapisteissä sekä ulkopuolella A on varmasti suurempi kuin yllä löydetty arvo. Tässä joukossa jatkuvalla funktiolla A on olemassa minimi, ja sen on löydyttävä kriittisestä pisteestä.

Näin ollen pinta-ala saa pienimmän arvonsa kun pohjan säde on sama kuin korkeus , joka kiinnitetyllä tilavuudella on $\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$.

Tehtävä 2. ([Martio, 3.4:2]) Määritä funktion $f(x,y) = xy$ maksimiarvo joukossa $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 4\}$?

Ratkaisu 2. Merkitään $g(x,y) = 2x+y$. Huomattuamme, että $\nabla g(x,y) = (2,1) \neq (0,0)$, tiedämme jälleen, että rajoittuman $f|_D$ mahdolliset ääriarvot löytyvät pisteistä, joissa jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = 2\lambda \\ x & = \lambda \\ 2x + y & = 4 \end{cases}$$

Sijoittamalla toinen yhtälö ensimmäiseen saadaan $y = 2x$. Tämän avulla saadaan kolmannesta yhtälöstä $x = 1$. Ainoa mahdollinen ääriarvopiste on siis (1,2), jossa f saa arvon $f(1,2) = 2$. Seuraavaa tarkastelua varten huomioi, että tämä on >0.

Seuraavaksi varmistamme, ettei funktio f saa tätä pienempiä arvoja kyseisellä suoralla. Voimme vaatia, että $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, sillä muuten $f(x,y) = xy \leq 0$. Ensimmäinen vaatimus sijoitettuna suoran yhtälöön tuottaa ehdon $y \leq 4$ ja toinen puolestaan ehdon $x \leq 2$. Voimme siis rajoittua kompaktiin joukkoon $[0,2] \times [0,4]$, missä funktio f takuulla saavuttaa maksiminsa, ja tämä maksimi on myös koko funktion maksimi. Päätepisteissä se ei sitä saavuta, sillä niissä sen arvo on nolla. Siispä löytämämme kriittisen pisteen arvo on maksimi.

Tehtävä 3. ([Martio, 3.4:3], melkein) Mitkä ovat sen $\mathbb{R}^3$:n suorakulmion mitat, jolla on tilavuus $V_0 > 0$, ja pienin mahdollinen pinta-ala.

Ratkaisu 3.

Vastatkoon muuttujat x,y ja z suorakulmion sivujen pituuksia. Oletetaan, että nämä ovat suurempia kuin nolla. Tehtävämme on siis minimoida pinta-alafunktio $A : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$

$$A(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

tasa-arvopinnalla $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : V(x,y,z) = xyz = V_0\}$, $V_0 > 0$.

Käytämme jälleen Lagrangen kertoimia. Koska $\nabla V(x,y,z) = (yz, xz, xy) \neq 0$ pinnalla D, niin tiedämme, että pinta-alan rajoittuma $A|_D$ voi saada ääriarvonsa vain pisteissä, joissa jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{cases} \nabla A(x,y,z) &= \lambda \nabla V(x,y,z) \\ V(x,y,z) &= V_0 \end{cases}$$

Kun tämän laskee auki ja liittää Lambdaan vakion 2, joka jää jokaisen ∇A:n komponentin eteen, saamme seuraavan yhtälöryhmän, jonka saman tien ratkaisemme:

$$\begin{cases} y+x &= \lambda yz \quad | \cdot x \\ x+z &= \lambda xz \quad | \cdot y \\ x+y &= \lambda xy \quad | \cdot z \\ xyz &= V_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy+xz &= \lambda V_0 \quad (1) \\ xy+zy &= \lambda V_0 \quad (2) \\ xz+zy &= \lambda V_0 \quad (3) \end{cases}$$

$$''(1)-(2)'' \Rightarrow \; xz = zy \quad \Rightarrow x = y$$
$$''(2)-(3)'' \Rightarrow \; xy = xz \quad \Rightarrow y = z.$$

Eli $x = y = z$ ja tällöin, kun tilavuus on kiinnitetty, mahdollinen ääriarvo on : $x = \sqrt[3]{V_0}$.

Meidän vielä tarkastettava, ettei funktio saa tasa-arvopinnalla missään pienempiä arvoja. Kyseisellä pinnalla voimme ilmaista pinta-alan muodossa

$$A(x,y,z) = 2V_0\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right),$$

joten jos esim $x \to \infty$, niin $yz = V_0/x \to 0$ joten myös $min(y,z)^2 \to 0$. Tästä taas seuraa, että $1/z + 1/y \geq 1/min(y,z) \to \infty$, eli myös $A \to \infty$. Kuten aikaisemmin, voimme siis rajoittua sopivan suureen kompaktiin joukkoon, jossa funktio A saa ääriarvonsa pisteessä, joka ei voi olla muu kuin löytämämme kriittinen piste.

Tehtävä 4.([Martio, 3.4:4]) Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.

Ratkaisu 4. Tehdään ensin muuttujanvaihto kuvauksella $w : (0,\infty) \times [0,\pi] \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $(r,t) \mapsto (r\cos(t), r\sin(t)) =: (x,y)$. Tämä on bijektio lukuunottamatta maalijoukon pistettä (0,0), mutta tässä funktio f saa arvon 0, joka ei selvästi ole sen ääriarvo. Tästä syystä voimmekin tutkia yhtäpitävästi funktion $g = f \circ w : (0,\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$

$$g(r,t) = \frac{r\cos(t) - r\sin(t)}{1+r^2} = \frac{r}{1+r^2}(\cos(t) - \sin(t))$$

ääriarvoja. Merkitään $g_1(r) = \frac{r}{1+r^2}$ ja $g_2(t) = (\cos(t) - \sin(t))$, jolloin $g(r,t) = g_1(r)g_2(t)$. Tarkastellaan ensin funktion arvoja pisteissä $t \in (0,\pi)$: siellä jokainen ääriarvokohta on kriittinen piste (sillä g on jatkuvasti derivoituva), joten etsitään gradientin nollakohdat:

$$\nabla g(r,t) = (\partial_r g_1(r)g_2(t), \partial_t g_2(t)g_1(r)) = (0,0)$$

Koska $g_1(r) > 0, \forall r$, emmekä ole kiinnostuneita pisteistä joissa $g_2(t) = 0$ (sillä tällöin myös $g(r,t) = 0$, joka ei ole ääriarvo), ylläoleva ehto toteutuu vain kun $\partial_r g_1 = 0$ ja $\partial_t g_2 = 0$. Eli kun

$$\partial_r \frac{r}{1+r^2} = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} = 0 \iff r = 1 \quad (r > 0)$$

$$\partial_t[\cos(t) - \sin(t)] = -\sin(t) - \cos(t) = 0 \iff \tan(t) = -1$$

Nyt $g_1(1) = 1/2$, ja meidän määrittelyalueessamme $\tan(t) = -1$ joss $t = 4\pi/3$, jossa funktio g_2 puolestaan saa arvon $-\cos(4\pi/3) - \sin(4\pi/3) = -1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$. Näin ollen itse funktio $g(r,t)$ saa kriittisessä pisteessä (1,$4\pi/3$) arvon $-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -1/\sqrt{2}$.

Meidän on vielä tutkittava arvot akselilla y=0 eli, origoa jälleen lukuunottamatta, joukoissa r>0 ja t=π tai t=0. Ensimmäisessä puolikkaassa g yksinkertaistuu muotoon $g(r,\pi) = -g_2(r) < 0$, ja toisessa puolikkaassa muotoon $g(r,0) = g_2(r) > 0$. Tietojemme perusteella näistä ensimmäisellä on minimi $-1/2$, ja toisella maksimi $1/2$.

Lopuksi vielä toteamme, että funktio g lähestyy nollaa , kun $r \to \infty$, joten ääriarvotarkasteluissa voimme rajoittua johonkin kompaktiin puolikiekkoon, jossa jatkuvalla funktiolla on sekä minimi, että maksimi. Valitsemalla säteen tarpeeksi suureksi voimme olla varmoja, etteivät arvot puolikaarella tule kysymykseen. Näin ollen ääriarvot sijaitsevat joko kriittisissä pisteissä tai akselilla y=0.

Yhteenvetona funktio $g = f \circ w$, ja täten myös itse funktio f saa maksimiarvon $1/2$ ja minimiarvon $-1/\sqrt{2}$.

Tehtävä 5. Olkoon $D = [0,1] \times [0,1]$. Laske integraali,

$$\int_D (x^2 + xy)dA.$$

Ratkaisu 5. Ensinnäkin on tärkeää korostaa, että funktio $(x,y) \to x^2 + xy$ on jatkuva ja rajoitettu neliössä D. Tästä seuraa kaksi tulosta, joiden molempien esillenostaminen on tehtävän mallikelpoisuuden kannalta huomattavasti tärkeämpää kuin itse laskutoimitus niiden jälkeen.

(1) funktio f on (Riemann)integroituva.
(2) Integraali voidaan laskea iteroituna integraalina.

Lasku menee seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\int_D (x^2 + xy)dA &= \int_0^1 (\int_0^1 (x^2 + xy)dx)dy \\
&= \int_0^1 (1/3 + y/2)dy \\
&= 1/3 + 1/4 \\
&= 7/12.
\end{aligned}$$

Tehtävä 6. Olkoon D kuten yllä. Laske integraali

$$\int_D y^2 e^{xy}.$$

Ratkaisu 6. Jälleen on syytä korostaa, että funktio $(x, y) \to y^2 e^{xy}$ on jatkuva ja rajoitettu. Se on siis integroituva ja voidaan laskea iteroituna integraalina:

$$\begin{aligned}
\int_D y^2 e^{xy} dA &= \int_0^1 (\int_0^1 y^2 e^{xy} dx)dy \\
(y \text{ on vakio } x:n \text{ suhteen}) &= \int_0^1 y(\int_0^1 y e^{xy} dx)dy \\
&= \int_0^1 y(e^y - 1)dx \\
&= \int_0^1 y e^y dy - \int_0^1 y dy \\
(ositta isintegrointi) &= (1e^1 - 0e^0) - \int_0^1 e^y dy - \int_0^1 y dy \\
&= e - (e - 1) - 1/2 \\
&= 1/2.
\end{aligned}$$