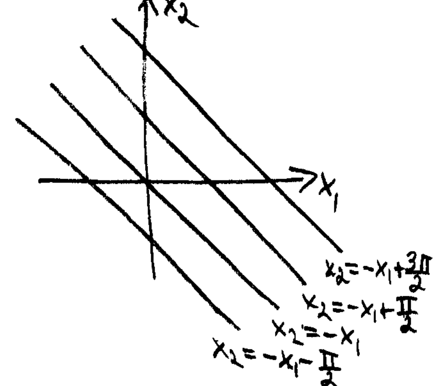
① $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$. Koska $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, sen lokaalit ääriarvokohdat ovat kriittisiä pisteitä. Nyt $\nabla f(x) = (1,1) \neq (0,0)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$. Niinpä funktiolla f ei ole kriittisiä pisteitä eikä lokaaleja ääriarvokohtia.

② $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = \sin(x_1+x_2)$. Koska $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, sen lokaalit ääriarvokohdat ovat kriittisiä pisteitä.



$$\begin{cases} \partial_1 f(x_1,x_2) = 0 \\ \partial_2 f(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x_1+x_2) = 0 \\ \cos(x_1+x_2) = 0 \end{cases} \iff$$

$$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Siis (a_1,a_2) on funktion f kriittinen piste, jos ja vain jos $a_1+a_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Hessen matriisista ei ole nyt apua lokaalien ääriarvokohtien etsimisessä.

Tapaus I: $a=(a_1,a_2)$ ja $a_1+a_2 = \pi/2 + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin $f(a_1,a_2) = \sin(\frac{\pi}{2}+n2\pi) = 1$. Koska $f(x_1,x_2) \leq 1$ kaikilla $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, (a_1,a_2) on lokaali maksimikohta. Koska jokaisella $\delta > 0$ kuula $B(a,\delta)$ sisältää myös muita pisteitä (x_1,x_2), joilla $x_1+x_2 = \frac{\pi}{2}+n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a ei ole aito lokaali maksimikohta.

Tapaus II: $a=(a_1,a_2)$ ja $a_1+a_2 = -\pi/2 + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin $f(a_1,a_2) = \sin(-\frac{\pi}{2}+n2\pi) = -1$. Koska $f(x_1,x_2) \geq -1$ kaikilla $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, (a_1,a_2) on lokaali minimikohta. Koska jokaisella $\delta > 0$ kuula $B(a,\delta)$ sisältää myös muita pisteitä (x_1,x_2), joilla $x_1+x_2 = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a ei ole aito lokaali minimikohta.

③ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = \sin^2(x_1+x_2)$. Koska $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, sen lokaalit ääriarvokohdat ovat kriittisiä pisteitä.

$$\begin{cases} \partial_1 f(x_1,x_2) = 0 \\ \partial_2 f(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin(x_1+x_2)\cos(x_1+x_2) = 0 \\ 2\sin(x_1+x_2)\cos(x_1+x_2) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\sin(x_1+x_2)\cos(x_1+x_2) = 0 \iff x_1+x_2 = n\pi \text{ tai } x_1+x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Siis (a_1,a_2) on funktion f kriittinen, jos ja vain jos $a_1+a_2 = n\pi$ tai $a_1+a_2=\frac{\pi}{2}+n\pi$ jollakin $n\in\mathbb{Z}$. Taaskaan Hessen matriisista ei ole apua lokaalien ääriarvokohtien etsimisessä.

Tapaus I: $a_1+a_2=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Tällöin $f(a_1,a_2)=\sin^2(n\pi)=0$. Koska $f(x_1,x_2)\geq 0$ kaikilla $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, (a_1,a_2) on lokaali minimikohta. Kuten tehtävässä 2, nähdään, ettei kyseessä ole aito lokaali minimikohta.

Tapaus II: $a_1+a_2=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Tällöin $f(a_1,a_2)=\sin^2(\frac{\pi}{2}+n\pi)=1$. Koska $f(x_1,x_2)\leq 1$ kaikilla $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, (a_1,a_2) on lokaali maksimikohta. Taaskin nähdään, ettei kyseessä ole aito lokaali maksimikohta.

4 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x_1,x_2)=e^{x_1^2+x_2^2}-\lambda(x_1^2+x_2^2)$. Koska $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, sen lokaalit ääriarvokohdat ovat kriittisiä pisteitä.

$$\begin{cases}\partial_1 g(x_1,x_2)=0\\ \partial_2 g(x_1,x_2)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x_1(e^{x_1^2+x_2^2}-\lambda)=0\\ 2x_2(e^{x_1^2+x_2^2}-\lambda)=0\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases} \quad \text{tai} \quad e^{x_1^2+x_2^2}=\lambda.$$

Jos $\lambda\leq 1$, funktiolla f on vain yksi kriittinen piste $(0,0)$. Jos $\lambda>1$, funktion f kriittiset pisteet ovat $(0,0)$ ja ne pisteet (a_1,a_2), joilla $a_1^2+a_2^2=\ln\lambda$ (eli origokeskisen ympyrän, jonka säde on $\sqrt{\ln\lambda}$, pisteet). Joitain erikoistapauksia lukuunottamatta Hessen matriisia ei voi nyt käyttää lokaalien ääriarvokohtien löytämiseen.

Kun merkitään $t=x_1^2+x_2^2$, $g(x_1,x_2)=e^t-\lambda t$ (funktion g arvo on vakio origokeskisillä ympyröillä). Olkoon $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=e^t-\lambda t$. Nyt $f'(t)=e^t-\lambda$. Jos $\lambda\leq 1$, $f'(t)>0$ kaikilla $t>0$, joten f on (aidosti) kasvava. Niinpä piste 0 on funktion f (aito) lokaali minimikohta (Määritelmän 2.91 mielessä, katso myös huomautus 2.93). Jos $\lambda>1$, f on (aidosti) vähenevä välillä $[0,\ln\lambda]$ ja (aidosti) kasvava välillä $(\ln\lambda,\infty)$. Niinpä piste 0 on funktion f (aito) lokaali maksimikohta ja piste $\ln\lambda$ on sen (aito) lokaali minimikohta.

Tapaus $\lambda \le 1$. Edellä olevista tarkasteluista nähdään, että g:llä on yksi lokaali ääriarvokohta $(0,0)$ ja se on g:n (aito) lokaali minimikohta.

Tapaus $\lambda > 1$. Edellä olevista tarkasteluista nähdään, että g:n lokaalit ääriarvokohdat ovat $(0,0)$ ja ne pisteet (a_1,a_2), joilla $a_1^2+a_2^2 = \ln\lambda$. Piste $(0,0)$ on (aito) lokaali maksimikohta. Pisteet $a=(a_1,a_2)$, joilla $a_1^2+a_2^2=\ln\lambda$ ovat lokaaleja minimikohtia. Ne eivät ole aitoja lokaaleja minimikohtia, koska jokainen kuula $B(a,\delta)$, $\delta>0$, sisältää muita samankaltaisia pisteitä.

5 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = e^{x_1^2} + e^{x_2^2} - (x_1-x_2)^2$. Koska $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, sen lokaalit ääriarvokohdat ovat kriittisiä pisteitä.

$$\partial_1 f(x_1,x_2) = 2x_1e^{x_1^2} - 2(x_1-x_2),$$
$$\partial_2 f(x_1,x_2) = 2x_2e^{x_2^2} + 2(x_1-x_2),$$
$$\partial_1\partial_1 f(x_1,x_2) = 2e^{x_1^2} + 4x_1^2e^{x_1^2} - 2,$$
$$\partial_2\partial_1 f(x_1,x_2) = \partial_1\partial_2 f(x_1,x_2) = 2 \quad \text{ja}$$
$$\partial_2\partial_2 f(x_1,x_2) = 2e^{x_2^2} + 4x_2^2e^{x_2^2} - 2.$$

$$\begin{cases}\partial_1 f(x_1,x_2)=0\\ \partial_2 f(x_1,x_2)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x_1e^{x_1^2} - 2(x_1-x_2)=0\\ 2x_2e^{x_2^2} + 2(x_1-x_2)=0\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}2x_1e^{x_1^2} - 2(x_1-x_2)=0\\ 2x_1e^{x_1^2} + 2x_2e^{x_2^2} = 0\end{cases} \overset{(*)}{\iff} \begin{cases}2x_1e^{x_1^2} - 2(x_1-x_2)=0\\ x_2=-x_1\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}2x_1(e^{x_1^2}-2)=0\\ x_2=-x_1\end{cases} \iff \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases} \text{tai} \begin{cases}x_1=\sqrt{\ln 2}\\ x_2=-\sqrt{\ln 2}\end{cases} \text{tai} \begin{cases}x_1=-\sqrt{\ln 2}\\ x_2=\sqrt{\ln 2}.\end{cases}$$

(*) Merkitään $g(t) = 2te^{t^2}$. Tällöin $g(-t) = -g(t)$ ja g on aidosti kasvava, sillä $g'(t) = 2e^{t^2} + 4t^2e^{t^2} > 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Niinpä $g(t_1) + g(t_2) = 0$, jos ja vain jos $t_2 = -t_1$.

Siis f:n kriittiset pisteet ovat $(0,0)$, $(\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$ ja $(-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$.

Funktion f Hessen matriisi pisteessä $(0,0)$ on

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(0,0) & \partial_2\partial_1 f(0,0) \\ \partial_1\partial_2 f(0,0) & \partial_2\partial_2 f(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koska $\det H(0,0) = 0\cdot 0 - 2\cdot 2 = -4 < 0$, piste $(0,0)$ ei ole funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ lokaali ääriarvokohta.

Funktion f Hessen matriisi pisteessä $(\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$ on

$$H(\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = \begin{bmatrix} 2+8\ln 2 & 2 \\ 2 & 2+8\ln 2 \end{bmatrix}.$$

Koska $\det H(\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = (2+8\ln 2)^2 - 2^2 > 0$ ja $\partial_1\partial_1 f(\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2}) = 2+8\ln 2 > 0$, piste $(\sqrt{\ln 2}, -\sqrt{\ln 2})$ on funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (aito) lokaali minimikohta. Samoin nähdään, että $(-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$ on f:n (aito) lokaali minimikohta.

6 $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1,x_2) = (4 - x_1^2 - x_2^2)e^{x_1-x_2}$. Koska $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$, sen lokaalit ääriarvokohdat ovat kriittisiä pisteitä.

$$\partial_1 h(x_1,x_2) = (4 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1)e^{x_1-x_2},$$
$$\partial_2 h(x_1,x_2) = (-4 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2)e^{x_1-x_2},$$
$$\partial_1\partial_1 h(x_1,x_2) = (4 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 - 2x_1 - 2)e^{x_1-x_2},$$
$$\partial_2\partial_1 h(x_1,x_2) = \partial_1\partial_2 h(x_1,x_2) = (-4 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 2x_1)e^{x_1-x_2} \text{ ja}$$
$$\partial_2\partial_2 h(x_1,x_2) = (4 - x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 + 2x_2 - 2)e^{x_1-x_2}.$$

$$\begin{cases} \partial_1 h(x_1,x_2) = 0 \\ \partial_2 h(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1)e^{x_1-x_2} = 0 \\ (-4 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2)e^{x_1-x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 = 0 \\ -4 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 - x_1^2 - x_1^2 - 2x_1 = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1 - 2 = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Siis funktion f kriittiset pisteet ovat $(1,-1)$ ja $(-2,2)$.

Funktion f Hessen matriisi pisteessä $(1,-1)$ on

$$H(1,-1) = \begin{bmatrix} -4e^2 & 2e^2 \\ 2e^2 & -4e^2 \end{bmatrix}.$$

Koska $\det H(1,-1) = (4e^2)^2 - (2e^2)^2 > 0$ ja $\partial_1\partial_1 f(1,-1) = -4e^2 < 0$, piste $(1,-1)$ on funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (aito) lokaali maksimikohta.

Funktion f Hessen matriisi pisteessä $(-2,2)$ on

$$H(-2,2) = \begin{bmatrix} 2e^{-4} & -4e^{-4} \\ -4e^{-4} & 2e^{-4} \end{bmatrix}.$$

Koska $\det H(-2,2) = (2e^{-4})^2 - (4e^{-4})^2 < 0$, piste $(-2,2)$ ei ole funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ lokaali ääriarvokohta.