(1) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^{\|x\|} = e^{\ln \|x\|^{\|x\|}} = e^{\|x\| \ln \|x\|}$
$= e^{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \ln \sqrt{x_1^2+x_2^2}}$ (a^b ($a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$) määritellään usein kaavalla $a^b = e^{b \ln a}$)

Kun $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, niin

$$\partial_1 f(x) = e^{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \ln \sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} \ln \sqrt{x_1^2+x_2^2} \right)$$

$$= \|x\|^{\|x\|} \left(\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2+x_2^2) \right) \ln \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{x_1^2+x_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{x_1^2+x_2^2} \right)$$

$$= \|x\|^{\|x\|} \left(\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 \cdot \ln \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{x_1^2+x_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \cdot \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2+x_2^2)}^{=2x_1} \right)$$

$$= \|x\|^{\|x\|} \left(\frac{x_1 \ln \|x\|}{\|x\|} + \frac{x_1}{\|x\|} \right)$$

$$= x_1 (1 + \ln \|x\|) \|x\|^{\|x\|-1}.$$

Vastaavasti: $\partial_2 f(x) = x_2(1 + \ln\|x\|)\|x\|^{\|x\|-1}$. Koska $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, niin (Martion kirjan) Lauseen 2.5.2 perusteella f on differentioituva (eli derivoituva) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:ssa. Niinpä Lauseen 2.4.5 mukaan

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)) = (1 + \ln\|x\|)\|x\|^{\|x\|-1}(x_1, x_2),$$

Huom. Yleensä kaava $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x))$ otetaan f:n gradientin määritelmäksi, mutta Martion kirjassa ei tehdä niin.

(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^3}{\|x\|}, & \text{kun } x \neq 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$

Väite: f on differentioituva pisteessä 0.

Tod. Kun $x \neq 0$,

$$f(x) - f(0) = f(x) - 0 = \frac{x_1^3}{\|x\|} = \|x-0\| \frac{x_1^3}{\|x\|\,\|x-0\|}$$

$$= \underbrace{(0,0)\cdot(x-0)}_{=0} + \|x-0\| \left(x_1 \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \right)$$

$$= (0,0)\cdot(x-0) + \|x-0\| \, \varepsilon(x-0),$$

missä

$$\varepsilon(x-0) = \varepsilon(x) = x_1 \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \qquad (x \neq 0).$$

Enää riittää osoittaa, että $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Tämä nähdään välittömästi(*) siitä, että kun $x \neq 0$,

$$|\varepsilon(x)| = |x_1| \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \leq |x_1|. \quad \square$$

(*) Nimittäin jos (a_i) on $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:in jono, jolla $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$, niin

$$-|a_{i,1}| \leq \varepsilon(a_{i,1}, a_{i,2}) \leq |a_{i,1}|.$$

Siksi kuristusperiaatteen (Analyysi I) perusteella $\lim_{i\to\infty} \varepsilon(a_i) = 0$.

(3) Olkoon $(a,b), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Merkitään $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t,b)$. Tehtävän oletuksen perusteella yhden muuttujan funktio g on derivoituva ($g'(t) = \partial_1 f(t,b)$). Koska $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, se on myös jatkuva (Analyysi I). Niinpä yhden muuttujan funktion väliarvolauseen (Analyysi I) perusteella tapauksessa $a \neq \alpha$ saadaan

$$g(a) - g(\alpha) = g'(t_0)(a-\alpha), \text{ jollakin } t_0 \in (a,\alpha) \cup (\alpha, a).$$

Koska $g'(t_0) = \partial_1 f(t_0, b) = 0$, niin $f(a,b) = g(a) = g(\alpha) = f(\alpha, b)$. Tämä pätee tietenkin myös tapauksessa $a = \alpha$. Siis

$$f(a,b) = f(\alpha, b) \text{ kaikilla } a, b, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Merkitään $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = f(\alpha, t)$. Kuten edellä, tapauksessa $b \neq \beta$ saadaan yhden muuttujan funktion väliarvolauseesta

$$h(b) - h(\beta) = h'(t_0)(b-\beta), \text{ jollakin } t_0 \in (b,\beta) \cup (\beta, b).$$

Koska $h'(t_0) = \partial_2 f(\alpha, t_0) = 0$, niin $f(\alpha, b) = h(b) = h(\beta) = f(\alpha, \beta)$. Tämä pätee tietenkin myös tapauksessa $b = \beta$. Siis

$$f(\alpha, b) = f(\alpha, \beta) \text{ kaikilla } \alpha, b, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Kaavoista (1) ja (2) saadaan

$$f(a,b) = f(\alpha, \beta) \text{ kaikilla } a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Niinpä f on vakio.

<u>Huom.</u> Martion kirjan (tavanomaisesta poikkeavassa) määritelmässä gradientin $\nabla f(x_0)$ olemassaolo pitää sisällään f:n differentioituvuuden pisteessä x_0. Sitä ei edellä kuitenkaan tarvittu. Tästä syystä Martion kirjassa vastaavassa tehtävässä (2.4:3) ehdon $\nabla f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$ tilalla onkin $\partial_1 f(x) = 0$ ja $\partial_2 f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$. (Jos käytetään myös f:n differentioituvuutta, niin tehtävän ratkaisussa voidaan käyttää apuna myös Lausetta 2.5.9, jolloin olellisesti todistetaan $\mathbb{R}^2$:n väliarvolause, katso Martion kirjan harjoitus 2.5:1)

(4) Olkoon $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ja $\|v\| = 1$. Kun $\partial_{-v} f(x)$ on määritelty, niin

$$\partial_{-v} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h(-v)) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+(-h)v) - f(x)}{h} = - \lim_{h \to 0} \frac{f(x+(-h)v) - f(x)}{-h} \overset{(*)}{=}$$

$$-\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = -\partial_v f(x).$$

(*) $t = -h$ ja $h \to 0$ jos ja vain jos $t = -h \to 0$.

Tästä nähdään, että kun $\partial_{-v} f(x)$ on määritelty myös $\partial_v f(x)$ on määritelty ja $\partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x)$. Vastaavasti nähdään, että kun $\partial_v f(x)$ on määritelty myös $\partial_{-v} f(x)$ on määritelty. Niinpä $\partial_{-v} f(x)$ on määritelty jos ja vain jos $\partial_v f(x)$ on määritelty ja jos ne on määritelty, niin $\partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x)$.

(5) Ratkaisutapa I. Koska $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on differentioituva, niin kaikilla $x, x_0 \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \|x - x_0\| \, \varepsilon_{x_0}(x - x_0)$$

ja lisäksi $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x - x_0) = 0$. (Differentioituvuuden määritelmässä oleva funktio ε riippuu yleensä myös x_0:sta, siksi laitoin sen tähän alaindeksiksi.) Sijoittamalla tähän x:n paikalle $-x$ ja x_0:n paikalle $-x_0$ saadaan

$$\underbrace{f(-x)}_{=f(x)} - \underbrace{f(-x_0)}_{=f(x_0)} = \nabla f(-x_0) \cdot \underbrace{(-x - (-x_0))}_{= -(x-x_0)} + \underbrace{\|-x-(-x_0)\|}_{=\|x-x_0\|} \underbrace{\varepsilon_{-x_0}(-x-(-x_0))}_{=\varepsilon_{-x_0}(-(x-x_0))}$$

Kun merkitään $\mathcal{E}^*(y) = \mathcal{E}_{-x_0}(-y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, saadaan

$$f(x) - f(x_0) \overset{\cdot\cdot}{=} -\nabla f(-x_0)\cdot(x-x_0) + \|x-x_0\|\,\mathcal{E}^*(x-x_0),$$

Koska $\lim_{x\to x_0} \mathcal{E}^*(x-x_0) = \lim_{x\to x_0} \mathcal{E}_{-x_0}(-(x-x_0)) = 0$, niin $-\nabla f(-x_0)$ on $\nabla f(x_0)$.

Entä minkä arvon $\nabla f(0)$ saa? Kun $x=0$, saadaan juuri osoitetusta kaavasta $\nabla f(-0) = -\nabla f(0)$ eli $\nabla f(0) = -\nabla f(0)$ eli $2\nabla f(0) = 0$ eli $\nabla f(0) = 0$.

<u>Ratkaisutapa II</u>. Koska $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on differentioituva, niin Lauseen 2.4.5 perusteella

$$\nabla f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0)).$$

Osittaisderivaatan määritelmän perusteella

$$\partial_i f(-x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x_0 + he_i) - f(-x_0)}{h} \overset{(*)}{=}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(-x_0 - te_i) - f(-x_0)}{-t} \overset{(**)}{=}$$

$$-\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = -\partial_i f(x_0).$$

(*) $t = -h$ ja $h \to 0$ jos ja vain jos $t \to 0$.

(**) $f(-x_0 - te_i) = f(-(x_0 + te_i)) = f(x_0 + te_i)$ ja $f(-x_0) = f(x_0)$.

Siis $(\partial_1 f(-x_0), \ldots, \partial_n f(-x_0)) = -(\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0))$, joten Lauseen 2.4.5 mukaan $\nabla f(-x_0) = -\nabla f(x_0)$.

Ratkaisutapa III. Muuten kuin ratkaisutapa II, mutta osittaisderivaatan määritelmän sijasta turvaudutaan ketjusääntöön. (Ketjusääntöä ei kylläkään kaiketi ollut tarkoitus käyttää näissä laskareissa.)

Olkoon $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $w(x) = (w_1(x), \dots, w_n(x)) = (-x_1, \dots, -x_n) = -x$. Nyt $f(x) = f(-x) = (f \circ w)(x)$, joten ketjusäännön (Lause 2.5.7) perusteella

$$\partial_i f(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(w(x))\, \partial_i w_j(x).$$

Koska

$$\partial_i w_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } i \neq j, \text{ ja} \\ -1, & \text{kun } i = j, \end{cases}$$

saadaan

$$\partial_i f(x) = \partial_i f(w(x))(-1) = -\partial_i f(-x).$$

⑥ Tässä lienee tarkoitus laske puron suunta $\mathbb{R}^2$:ssa (korkeusmuutos jätetään huomiotta. Tämä on ainakin sikäli järkevää, että annettu pistekin on $\mathbb{R}^2$:ssa ($\mathbb{R}^3$:ssahan se olisi $(3,2,h(3,2))$. Yleensäkin purojen (ja vastaavien) suunnista puhuttaessa sanotaan, että puro virtaa esim. koilliseen.

Puro virtaa siihen suuntaan mihin maasto laskee nopeiten. Koska h:n gradientti osoittaa siihen suuntaan mihin h kasvaa nopeiten (tämä nähdään Lauseesta 2.7.1), niin puron virtaussuunta on päinvastainen. Siis pisteessä $(3,2)$ puron virtaussuunta on $-\nabla h(3,2)$. Nyt

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{10}{3+x^2+2y^2} \right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{10}{3+x^2+2y^2} \right) \right)$$

$$= \left(-\frac{10}{(3+x^2+2y^2)^2} \cdot 2x, -\frac{10}{(3+x^2+2y^2)^2} \cdot 4y \right),$$

Joten

$$\nabla h(3,2) = \left(-\frac{60}{400}, -\frac{80}{400} \right) = -\left(\frac{15}{100}, \frac{20}{100} \right).$$

Siis puron suunta pisteessä $(3,2)$ on

$$-\nabla h(3,2) = \left(\frac{15}{100}, \frac{20}{100} \right)$$

Jos puron virtaussuuntaan halutaan myös korkeuskomponentti, se saadaan seuraavasti. Merkitään

$$v = (v_1, v_2) = -\frac{\nabla h(3,2)}{\|\nabla h(3,2)\|} \quad (\text{jolloin } \|v\| = 1).$$

Puron suunta $\mathbb{R}^3$:ssa pisteessä $(3,2,h(3,2)) = (3,2,\frac{1}{2})$ on

$$(v_1, v_2, \partial_v f(3,2)).$$

$\partial_v f(3,2)$:n laskemisessa kannattaa käyttää Lausetta 2.7.1: $\partial_v f(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot v$.