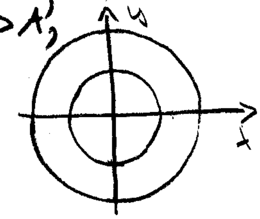
① $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{1}{4}\le x^2+y^2\le 1\}$. Olkoot $A=(\frac{1}{2},1)\times(0,2\pi)$, $A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{1}{4}<x^2+y^2<1\}\setminus\{(x,0)\in\mathbb{R}^2;\ x\ge 0\}$ ja $w: A\to A'$,



$$w(r,\varphi)=(w_1(r,\varphi),w_2(r,\varphi))=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi).$$

Tällöin A ja A' ovat avoimia, $\bar{A}$ ja $\bar{A}'$ ovat kompakteja, ∂A ja $\partial A'$ ovat nollajoukkoja sekä $w: A\to A'$ on bijektiivinen $C^1(A)$-kuvaus (eli $w_1\in C^1(A)$ ja $w_2\in C^1(A)$).

$f: D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$. Koska $D\subset\mathbb{R}^2$ on kompakti, $\partial D=\partial A'$ on nollajoukko ja $f: D\to\mathbb{R}$ on jatkuva, niin Lauseen 4.2.3(a) perusteella f on integroituva yli joukon D. Edelleen, koska $D=A'\cup\partial A'$, $\partial A'$ ja $\partial(\partial A')\ (=\partial A')$ ovat nollajoukkoja sekä $A'\cap\partial A'=\emptyset\subset\partial A'\cap\partial(\partial A')\ (=\partial A'\cap\partial A'=\partial A')$, niin Lauseen 4.2.5(b) perusteella

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{A'} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{\partial A'} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Koska f on rajoitettu $\partial A'$:ssa ja $\partial A'\subset\mathbb{R}^2$ on kompakti nollajoukko, niin Lauseen 4.2.3(b) perusteella

$$\int_{\partial A'} f(x,y)\,dx\,dy=0.$$

Siis

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{A'} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Edelleen, Lauseen 4.5.2 perusteella

$$\int_{A'} f(x,y)\,dx\,dy=\int_A f(w(r,\varphi))\,|\det w'(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi.$$

$$\det w'(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\partial_1 w_1(r,\varphi) & \partial_2 w_1(r,\varphi)\\ \partial_1 w_2(r,\varphi) & \partial_2 w_2(r,\varphi)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Siis $|\det w'(r,\varphi)| = |r| = r$, joten

$$\int_{A'} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{(\frac{1}{2},1)\times(0,2\pi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{(\frac{1}{2},1)\times(0,2\pi)} r\ln(r^2)\,dr\,d\varphi \overset{(*)}{=} \int_{[\frac{1}{2},1]\times[0,2\pi]} r\ln(r^2)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_0^{2\pi} 2r\ln(r)\,d\varphi\right)dr = 4\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} r\ln(r)\,dr$$

$$\overset{\text{os.int.}}{=} 4\pi \Big/_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{r^2}{2}\ln(r) - 4\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\,dr$$

$$= 4\pi\left(\tfrac{1}{2}\ln(1) - \tfrac{1}{8}\ln(\tfrac{1}{2})\right) - 4\pi \Big/_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{r^2}{4}$$

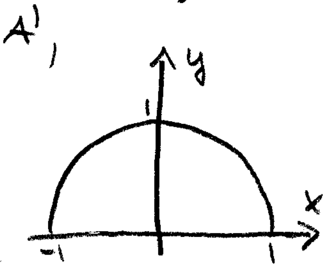
$$= -\frac{\pi}{2}\ln(2^{-1}) - 4\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln(2) - \pi\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(2) - \frac{3\pi}{4}.$$

(*) Tämä kohta perustellaan samaan tapaan kuin yhtälö (1), siis se perustuu oleellisesti siihen, että joukot $A = (\frac{1}{2},1)\times(0,2\pi)$ ja $[\frac{1}{2},1]\times[0,2\pi]$ ovat samat nollajoukkoa ∂A lukuunottamatta.

② $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 1 \text{ ja } y\ge 0\}$. Olkoot $A' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1 \text{ ja } y>0\}$, $A = (0,1)\times(0,\pi)$ ja $w: A\to A'$,

$$w(r,\varphi) = (w_1(r,\varphi), w_2(r,\varphi)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$



Tällöin A ja A' ovat avoimia, $\bar{A}$ ja $\bar{A'}$ ovat kompakteja, ∂A ja $\partial A'$ ovat nollajoukkoja sekä $w: A\to A'$ on bijektiivinen $C^1(A)$-kuvaus.

Niinpä nyt saadaan (kolmen ensimmäisen yhtäsuuruuden perustelut menevät samaan tapaan kuin tehtävässä 1)

$$\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{A'} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_{(0,1)\times(0,\pi)} \underbrace{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)}_{=r^2} \underbrace{|\det W'(r,\varphi)|}_{=r}\,dr\,d\varphi$$

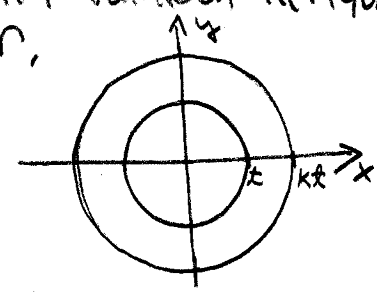
$$= \int_{[0,1]\times[0,\pi]} r^3\,dr\,d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^\pi r^3\,d\varphi\right) dr = \pi \int_0^1 r^3\,dr$$

$$= \pi \Big/_0^1 \frac{r^4}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

3) $A_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ t^2 \le x^2+y^2 \le k^2t^2\}$, missä $t>0$ ja $k>1$.

Ensimmäisen välivaiheen perustelut ovat samanlaiset kuin tehtävissä 1 ja 2, erityisesti muuttujien vaihtoon liittyvän Jacobin determinantin itseisarvo on r.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



$$\int_{A_t} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_{[t,kt]\times[0,2\pi]} \frac{r^2\cos^2(\varphi)}{r^4}\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_t^{kt} \frac{\cos^2(\varphi)}{r}\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\Big/_t^{kt} \cos^2(\varphi)\ln(r)\right)d\varphi$$

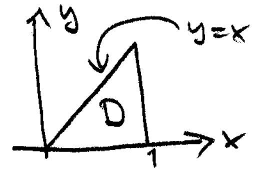
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)(\ln(kt)-\ln(t))\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\ln\left(\frac{kt}{t}\right)d\varphi$$

$$= \ln(k)\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2\varphi)+\tfrac{1}{2}\right)d\varphi = \ln(k)\Big/_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{4}\sin(2\varphi)+\tfrac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \pi\ln(k).$$

(4) Ratkaisutapa I. Olkoot $\Omega = \mathbb{R}^2$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x$ ja $h: [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$. Nyt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on avoin, $D \subset \Omega$ on kompakti, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ on $C^1(\Omega)$-kuvaus, $g(D) = [0,1] \subset [0,1]$ ja h on jatkuva. Kun $t \in [0,1]$, merkitään

$$A(t) = \text{area}(\{(x,y) \in D;\ g(x,y) \le t\})$$
$$= \text{area}(\{(x,y) \in D;\ x \le t\}) = \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot t = \frac{t^2}{2}$$



Nyt $A \in C^1([0,1])$ ja Lauseen 4.6.1 perusteella

$$\int_D x\,dxdy = \int_D h(g(x,y))\,dxdy = \int_0^1 h(t)A'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 t \cdot t\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \Big/_0^1 \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ratkaisutapa II. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y \le x$ ja $x \in [0,1]\}$, joten (Martion kirjan) luvun 4.4 perusteella

$$\int_D x\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^x x\,dy\Big)dx = \int_0^1 \Big(\Big/_0^x xy\Big)dx = \int_0^1 x^2\,dt$$
$$= \Big/_0^1 \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ratkaisutapa III. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \le x \le 1$ ja $y \in [0,1]\}$ ja nyt saadaan (vaihtamalla luvussa 4.4 x:n ja y:n roolit)

$$\int_D x\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_y^1 x\,dx\Big)dy = \int_0^1 \Big(\Big/_y^1 \frac{x^2}{2}\Big)dy = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\Big)dy$$
$$= \Big/_0^1 \Big(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(5) Ratkaisutapa I. $D = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ ja $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (\max(x,y))$. Koska $(f(x,y))^2$ on jatkuva, niin Lauseiden 4.1.3 ja 4.1.7 perusteella

$$\int_D (f(x,y))^2\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 (f(x,y))^2\,dx\Big)dy$$

Edelleen, Analyysi I -kurssin tietojen perusteella

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 (f(x,y))^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^y (f(x,y))^2 dx + \int_y^1 (f(x,y))^2 dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^y y^2 dx + \int_y^1 x^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left(\Big/_0^y xy^2 + \Big/_y^1 \frac{x^3}{3} \right) dy$$

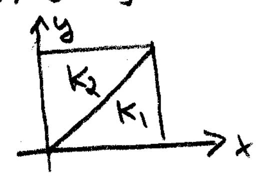
$$= \int_0^1 \left(y^3 + \frac{1}{3} - \frac{y^3}{3} \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{2y^3}{3} + \frac{1}{3} \right) dy = \Big/_0^1 \left(\frac{2y^4}{12} + \frac{y}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

<u>Ratkaisutapa II</u>. Olkoot $K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \le x \le 1 \text{ ja } 0 \le y \le 1\}$ ja $K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \le y \le 1 \text{ ja } 0 \le x \le 1\}$. Lauseen 4.2.5 (b) perusteella

$$\int_D (f(x,y))^2 dx\,dy = \int_{K_1} (f(x,y))^2 dx\,dy + \int_{K_2} (f(x,y))^2 dx\,dy$$

$$= \int_{K_1} x^2 dx\,dy + \int_{K_2} y^2 dx\,dy.$$



Olkoot $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x$, ja $h: [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$. Kun $t \in [0,1]$, merkitään

$$A(t) = \text{area}(\{(x,y) \in K_1;\ g(x,y) \le t\}) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot t = \frac{t^2}{2}.$$

Lauseen 4.6.1 perusteella

$$\int_{K_1} x^2 dx\,dy = \int_0^1 h(t) A'(t)\, dt = \int_0^1 t^2 \cdot t\, dt = \int_0^1 t^3 dt = \Big/_0^1 \frac{t^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

Vastaavasti saadaan $\int_{K_2} y^2 dx\,dy = \frac{1}{4}$.

<u>Huomautus</u>. Martion kirjassa on harjoitustehtävänä 4.6:2 vastaava tehtävä, joka on sen vihjeen perusteella ymmärtääkseni tarkoitus laskea seuraavaan tapaan. Kun $g(x,y) = \max(x,y)$, $h(x) = x^2$ ja

$$A(t) = \text{area}(\{(x,y) \in D;\ g(x,y) \le t\}) = t \cdot t = t^2$$

niin

$$\int_D h(g(x,y))\, dx\,dy \overset{(*)}{=} \int_0^1 h(t) A'(t)\, dt = \int_0^1 t^2 \cdot 2t\, dt = \Big/_0^1 \frac{t^4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ongelmana on vain se, ettei kohdassa (*) voi vedota lauseeseen 4.6.1, koska silloin pitäisi olla $g \in C^1(\Omega)$ jollakin avoimella Ω, $D \subset \Omega$. Nyt g:llä ei ole osittaisderivaattoja pisteissä (x,y), joilla $x=y$.

⑥ $\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dx\,dy}{x^2y^2}$ tarkoittaa samaa kuin

$$\int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{1}{x^2y^2}\,dx\right)dy = \int_1^\infty \left(\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2y^2}\,dx\right)dy$$
$$= \int_1^\infty \left(\lim_{a\to\infty} \Big/_1^a -\frac{1}{xy^2}\right)dy = \int_1^\infty \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{ay^2}+\frac{1}{y^2}\right)dy$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{y^2}\,dy = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{y^2}\,dy = \lim_{b\to\infty} \Big/_1^b -\frac{1}{y}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Huomaa, että tehtävän epäoleellinen integraali (itseasiassa siinä on kaksi epäoleellista integraalia) tarkoittaa eri asiaa kuin epäoleellinen integraali

$$\int_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{dx\,dy}{x^2y^2}.$$

Martion kirjan perusteella tämä voidaan laskea esimerkiksi seuraavasti(*)

$$\int_{[1,\infty)\times[1,\infty)} \frac{dx\,dy}{x^2y^2} = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]\times[1,n]} \frac{dx\,dy}{x^2y^2} = \lim_{n\to\infty}\int_1^n\left(\int_1^n \frac{1}{x^2y^2}\,dx\right)dy = \ldots = 1.$$

Ei ole sattumaa, että tästä tuli sama vastaus kuin tehtävän integraalista. Tähän asiaan liittyvää integroinnin ja raja-arvon järjestyksen vaihtoa selvitellään myöhemmällä integrointia laajemmin käsittelevällä kurssilla (Lebesgue-integraalin yhteydessä).

(*) Huomaa erityisesti, että integroitava funktio on ei-negatiivinen joukossa $[1,\infty)\times[1,\infty)$. Kirjan luvussa 4.4 olevat joukot D_n, $n \in \mathbb{N}$, ovat tässä laskussa $[1,n]\times[1,n]$, jolloin $D_n \subset D_{n+1}$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$ ja $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = [1,\infty)\times[1,\infty)$. Lisäksi tarkasteltava funktio on Riemann-integroituva yli jokaisen D_n, $n\in\mathbb{N}$, sillä se on jatkuva.