Vektorianalyysi syksy 2010
Ratkaisut harjoitukseen 11
Vadim Kulikov
Helsingin Yliopisto

Tehtävä 1. Ratkaisu. Olkoon $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2, 0 \leqslant z \leqslant h\}$. Olkoon

$$S\colon [0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

kuvaus jolle

$$S(R,\varphi,z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z),$$

jolloin S on sylenterikoordinaatistomuunnos. Rajoittuma

$$S \restriction (0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R}$$

on injektio ja $\{0\} \times [0,2\pi) \times \mathbb{R}$ on nollajoukko, joten muunnosta voi käyttää.

Muunnoksen Jakobiaani voidaan laskea determinantista:

$$\begin{aligned}
& \left|\det\begin{pmatrix} \partial_1 S_1 & \partial_2 S_1 & \partial_3 S_1 \\ \partial_1 S_2 & \partial_2 S_2 & \partial_3 S_2 \\ \partial_1 S_3 & \partial_2 S_3 & \partial_3 S_3 \end{pmatrix}\right| \\
= & \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -R\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \\
= & |R\cos^2\varphi + R\sin^2\varphi| \\
= & |R| = R,
\end{aligned}$$

koska $R \geqslant 0$. Sylinteri A saa muodon

$$\begin{aligned}
h^{-1}A &= \{(R,\varphi,z) \mid R^2 < r^2, 0 \leqslant z \leqslant h, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\} \\
&= \{(R,\varphi,z) \mid R < r, 0 \leqslant z \leqslant h, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}
\end{aligned}$$

ja integrointi saa muodon

$$\begin{aligned}
& \iiint_{h^{-1}A} zR^2 \cdot R \,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r zR^3 \,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi dz \\
= & \int_0^h \int_0^{2\pi} z\frac{r^4}{4} \,\mathrm{d}\varphi dz \\
= & \int_0^h z\frac{r^4}{2}\pi dz \\
= & \frac{h^2 r^4}{4}\pi
\end{aligned}$$

Tehtävä 2. Ratkaisu. Tehtävän voi raktaista kahdella tavalla.

Ratkaisutapa 1: Olkoon $H\colon \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\} \to \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x/1)^2+(y/b)^2+(z/c)^2 \leqslant 1\}$ koordinaatistomuunnos $H(x,y,z)=(ax,by,cz)$. On helppo nähdä, että $(x,y,z)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ jos ja vain jos $H(x,y,z)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x/1)^2+(y/b)^2+(z/c)^2\leqslant 1\}$ ja että H on bijektio. Kuvauksen H lähtöjoukko on pallo ja maalijoukko on tehtävän ellipsi E, eli $H^{-1}E = S$, missä S on $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallo.

Nyt jakobiaani on tulo abc ja integraali saa muodon:

$$\iiint_E 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{H^{-1}} abc\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc\iiint_{H^{-1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Viimeinen integraali on yksikköpallon tilavuus, joka on tunnetusti $\frac{4\pi}{3}$, eli vastaukseksi saadaan

$$\frac{4abc\pi}{3}.$$

Ratkaisutapa 2: Tehdään modifioitu napakoordinaattimuunnos:

$$H\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar\sin\varphi\cos\theta \\ br\sin\varphi\sin\theta \\ cr\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$0\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\varphi<\pi$, $0\leqslant\theta<2\pi$. Merkitsemällä $(x,y,z)=(ar\sin\varphi\cos\theta, br\sin\varphi\sin\theta, cr\cos\varphi)$, nähdään, että

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1 \\
\iff\quad & (r\sin\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2+(r\cos\varphi)^2\leqslant 1 \\
\iff\quad & r^2[\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi]\leqslant 1 \\
\iff\quad & r^2[\sin^2\varphi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})+\cos^2\varphi]\leqslant 1 \\
\iff\quad & r^2[\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{=1}]\leqslant 1 \\
\iff\quad & r\leqslant 1,
\end{aligned}$$

(koska $r\geqslant 0$). Toisin sanoin uusissa koordinaateissa ilmaistuna ellipsoidi on

$$H^{-1}E = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi<\pi, 0\leqslant\theta<2\pi\}$$

Lasketaan seuraavaksi muunnoksen H Jakobiaani:

$$
\begin{aligned}
& \left|\det\begin{pmatrix} \partial_1 H_1 & \partial_2 H_1 & \partial_3 H_1 \\ \partial_1 H_2 & \partial_2 H_2 & \partial_3 H_2 \\ \partial_1 H_3 & \partial_2 H_3 & \partial_3 H_3 \end{pmatrix}\right| \\
= & \left|\det\begin{pmatrix} a\sin\varphi & ar\cos\varphi\cos\theta & -ar\sin\varphi\sin\theta \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi\sin\theta & br\sin\varphi\cos\theta \\ c\sin\varphi & -cr\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\right| \\
= & c\cdot\cos\varphi[abr^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta + abr^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta] + cr\sin\varphi[abr\sin^2\varphi\cos^2\theta + abr\sin^2\varphi\sin^2\theta] \\
= & c\cdot\cos\varphi[abr^2\cos\varphi\sin\varphi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})] + cr\sin\varphi[abr\sin^2\varphi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})] \\
= & c\cdot\cos\varphi(abr^2\cos\varphi\sin\varphi) + cr\sin\varphi\cdot(abr\sin^2\varphi) \\
= & abcr^2\cdot[\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cdot\sin^2\varphi)] \\
= & abcr^2\cdot[\sin\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)] \\
= & abcr^2\sin\varphi
\end{aligned}
$$

Jakobiaani on siis $abcr^2\sin\varphi$. Tilavuusintegraali

$$\iiint_E 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

saa muodon

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} abcr^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
= & \int_0^1\int_0^\pi 2\pi abcr^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
= & \int_0^1 \Big/_0^\pi -2\pi abcr^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r \\
= & \int_0^1 -2\pi abcr^2[\underbrace{\cos\pi-\cos 0}_{=-2}]\,\mathrm{d}r \\
= & \int_0^1 4\pi abcr^2\,\mathrm{d}r \\
= & \Big/_0^1 4\pi abc\frac{r^3}{3} \\
= & \frac{4}{3}\pi abc
\end{aligned}
$$

Tehtävä 3. Ratkaisu.

Tehdään napakoordinaatistomuunnos H, joka on tehtävässä 2 esitetyn muunnoksen erikoistapaus, jossa

$$a = b = c = 1.$$

Nyt Jakobiaani on $abcr^2 \sin\varphi = r^2 \sin\varphi$ ja alue

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2\}$$

saa muodon

$$H^{-1}A = \{(r, \varphi, \theta) \mid R_1 \leqslant r \leqslant R_2, 0 \leqslant \varphi < \pi, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

ja integraali muodon

$$\begin{aligned}
\iiint_A \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} &= \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\varphi(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1})\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi} 2\pi r^2\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Päästäksemme eteenpäin, on laskettava integraali $\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Hajoitetaan lauseke $\sin^3\varphi = \sin\varphi \cdot \sin^2\varphi$ ja osittaisintegroidaan:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \underbrace{\Big/_{0}^{\pi} -\cos\varphi\sin^2\varphi}_{=0} - \int_0^{\pi} -\cos\varphi 2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} 3\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi} 3\cos^2\varphi\underbrace{(-\sin\varphi)}_{=\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{2}{3}\Big/_{0}^{\pi}\cos^3\varphi \\
&= -\frac{2}{3}(\underbrace{\cos^3\pi - \cos^3 0}_{=2}) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Nyt voidaan jatkaa, eli

$$
\begin{aligned}
&= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} 2\pi r^2 \sin^3 \varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{R_1}^{R_2} \frac{4}{3} \cdot 2\pi r^2 \, \mathrm{d}r \\
&= \Big/_{R_1}^{R_2} \frac{8}{9} \pi r^3 \\
&= \frac{8\pi}{9} (R_2^3 - R_1^3)
\end{aligned}
$$

Tehtävä 4. Ratkaisu.

$$\int_\gamma f(x,y) dS = \int_{-1}^{1} f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t,$$

missä $f(x,y) = \frac{y}{x}$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Laskemalla nähdään

$$|\gamma'(t)| = |(1, 2t)| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Integraali saa muodon:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{t} \sqrt{1 + 4t^2}$$

Huomaa, että tämä lauseke ei ole määritelty kun $t = 0$, mutta kaikissa muissa pisteissä se saa saman arvon kuin lauseke $t\sqrt{1 + 4t^2}$. Yllä pitäisi siis lukea

$$\lim_{x \to 0^-} x \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{t} \sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d}t + \lim_{x \to 0^+} x \int_{x}^{1} \frac{t^2}{t} \sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d}t$$

tai

$$\int_{[-1,1] \setminus \{0\}} \frac{t^2}{t} \sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d}t$$

Koska nollan ulkopuolella lauseke on sama kuin $t\sqrt{1 + 4t^2}$, niin tämä integraali on sama kuin

$$\int_{[-1,1] \setminus \{0\}} t\sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d}t$$

ja koska $\{0\}$ on nollajoukko, tämä on sama kuin

$$\int_{-1}^{1} t\sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Merkitään $g(t) = t\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t$. Selvästi nähdään, että kaikilla t pätee $g(-t) = -g(t)$. Tällaisille funktioille pätee

$$\int_{-a}^{a} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} g(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} g(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

eli integraali on 0.

Tehtävä 5. Ratkaisu. Nyt alue on puoliympyrä $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$, mutta toisin kuin monesti ympyrän yli integroidessa, tässä ei tehtävässä ei kannata siityä sylinterikoordinaatteihin, vaan integroidaan suoraan.

$$f(x,y) = x^2y^2 \to \partial_y f(x,y) = 2x^2y$$

ja

$$\begin{aligned}
\iint_A 2x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 2x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \Big/_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}^{\,2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 - x^4\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{1} \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Tehtävä 6. Ratkaisu. Greenin kaavasta seuraa:

$$\iint_E \nabla \cdot f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial E} f \cdot \bar{n}\,\mathrm{d}S,$$

missä $\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \partial_2 d_2$ on *divergenssi*. Laskemalla: $\nabla \cdot f = \nabla \cdot (x+y^3, x^3+y^3) = 1 + 3y^2$. Kuten tehtävässä 2, tehdään modifioitu muunnos:

$$S\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar\cos\varphi \\ br\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$E = \left\{(x,y) \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqslant 1\right\} = \{(ar\cos\varphi, br\sin\varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}.$$

Jakobiaani:

$$\begin{aligned}
& \left|\det\begin{pmatrix} \partial_1 S_1 & \partial_2 S_1 \\ \partial_1 S_2 & \partial_2 S_1 \end{pmatrix}\right| \\
= & \left|\det\begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}\right| \\
= & |abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi| \\
= & abr.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\iint_E \nabla \cdot f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + 3b^2r^2\sin^2\varphi)abr \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= ab\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r + 3b^2r^3\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= ab\int_0^1 \Big/_0^{2\pi} r\varphi + 3b^2r^3\frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}r \\
&= ab\int_0^1 2\pi r + 3b^2r^3\pi\,\mathrm{d}r \\
&= ab\Big/_0^1 2\pi\frac{r^2}{2} + 3b^2\frac{r^4}{4}\pi\,\mathrm{d}r \\
&= ab\pi + \frac{3ab^3}{4}\pi
\end{aligned}$$