Vektorianalyysi syksy 2010
Ratkaisut harjoitukseen 5
Vadim Kulikov
Helsingin Yliopisto

Tehtävä 1. Määritä funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kriittiset pisteet, ja mahdolliset lokaalien ääriarvokohtien laatu, kun

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2+x_2^2}.$$

Ratkaisu. Funktio f kuuluu luokkaan $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, joten se on jatkuvasti derivoituva mielivaltaisen monta kertaa ja erityisesti $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f$, jota käytetään alempana.

Lasketaan ensin millä vektorin $\bar{x} = (x_1, x_2)$ arvoilla funktion derivaatta (gradientti) on nolla.

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x}) &= (\partial_1 f(\bar{x}), \partial_2 f(\bar{x}))\\ &= (\partial_1 e^{x_1^2+x_2^2}, \partial_2 e^{x_1^2+x_2^2})\\ &= (2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}, 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2}) = (0,0)\end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö toteutuu jos ja vain jos

$$2x_1 e^{x_1^2+x_2^2} = 0 \iff x_1 = 0,$$

(koska $e^{x_1^2+x_2^2} > 0$ kaikilla (x_1, x_2)) ja

$$2x_2 e^{x_1^2+x_2^2} = 0 \iff x_2 = 0,$$

(samasta syystä). Ainoa kriittinen piste on siis origo. Kriittisen pisteen laatua voi yrittää selvittää laskemalla funktion toiset derivaatat ja tutkimalla Hessin toisen asteen neliömuotoa. Toiset derivaatat:

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_1 f(\bar{x}) &= \partial_1 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}\\ &= 2e^{x_1^2+x_2^2} + 2x_1 \cdot 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}\\ &= (2+4x_1^2)e^{x_1^2+x_2^2}\\ &\overset{\bar{x}\mapsto\bar{0}}{=} 2\\ \partial_2\partial_2 f(\bar{x}) &= \partial_2 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2}\\ &= 2e^{x_1^2+x_2^2} + 2x_2 \cdot 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2}\\ &= (2+4x_1^2)e^{x_1^2+x_2^2}\\ &\overset{\bar{x}\mapsto\bar{0}}{=} 2\\ \partial_2\partial_1 f(\bar{x}) &= \partial_2 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}\\ &= 4x_1x_2 e^{x_1^2+x_2^2}\\ &\overset{\bar{x}\mapsto\bar{0}}{=} 0\\ \partial_1\partial_2 f(\bar{x}) &= \partial_2\partial_1 f(\bar{x}), \text{ kuten yllä todettiin.}\end{aligned}$$

Nyt $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, missä $a = \partial_1\partial_1 f(\bar{0})$, $b = \partial_1\partial_2 f(\bar{0})$, ja $c = \partial_2\partial_2 f(\bar{0})$, eli

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2k^2,$$

joka on kaikilla $(h,k) \neq (0,0)$ positiviinen, eli $Q(h,k)$ on positiivisesti definiitti, eli $(0,0)$ on aito lokaali minimi.

Tehtävä 2. Määritä funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kriittiset pisteet, ja mahdolliset lokaalien ääriarvokohtien laatu, kun

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_2^2}.$$

Ratkaisu. Tämä menee samoin kuin edellinen ratkaisu muutamaa yksityiskohtaa ja vastausta lukuun ottamatta; kokonaisuuden vuoksi tämäkin ratkaisu on kuitenkin annettu. Kuten yllä, funktio f kuuluu luokkaan $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, joten se on jatkuvasti derivoituva mielivaltaisen monta kertaa ja erityisesti $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f$, jota käytetään alempana.

Lasketaan ensin millä vektorin $\bar{x} = (x_1, x_2)$ arvoilla funktion derivaatta (gradientti) on nolla.

$$\begin{aligned}
\nabla f(\bar{x}) &= (\partial_1 f(\bar{x}), \partial_2 f(\bar{x})) \\
&= (\partial_1 e^{x_1^2 - x_2^2}, \partial_2 e^{x_1^2 - x_2^2}) \\
&= (2x_1 e^{x_1^2 - x_2^2}, -2x_2 e^{x_1^2 - x_2^2}) = (0,0)
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö toteutuu jos ja vain jos

$$2x_1 e^{x_1^2 - x_2^2} = 0 \iff x_1 = 0,$$

(koska $e^{x_1^2 - x_2^2} > 0$ kaikilla (x_1, x_2)) ja

$$-2x_2 e^{x_1^2 - x_2^2} = 0 \iff x_2 = 0,$$

(samasta syystä). Ainoa kriittinen piste on siis origo. Kriittisen pisteen laatua voi yrittää selvittää laskemalla funktion toiset derivaatat ja tutkimalla Hessin toisen asteen neliömuotoa. Toiset derivaatat:

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_1 f(\bar{x}) &= \partial_1 2x_1 e^{x_1^2-x_2^2} \\
&= 2e^{x_1^2-x_2^2} + 2x_1 \cdot 2x_1 e^{x_1^2-x_2^2} \\
&= (2+4x_1^2)e^{x_1^2-x_2^2} \\
&\overset{\bar{x}\mapsto\bar{0}}{=} 2 \\
\partial_2\partial_2 f(\bar{x}) &= \partial_2 - 2x_2 e^{x_1^2-x_2^2} \\
&= -2e^{x_1^2-x_2^2} + 2x_2 \cdot 2x_2 e^{x_1^2-x_2^2} \\
&= (-2+4x_1^2)e^{x_1^2-x_2^2} \\
&\overset{\bar{x}\mapsto\bar{0}}{=} -2 \\
\partial_2\partial_1 f(\bar{x}) &= \partial_2 2x_1 e^{x_1^2-x_2^2} \\
&= -4x_1x_2 e^{x_1^2-x_2^2} \\
&\overset{\bar{x}\mapsto\bar{0}}{=} 0 \\
\partial_1\partial_2 f(\bar{x}) &= \partial_2\partial_1 f(\bar{x}), \text{ kuten yllä todettiin.}
\end{aligned}$$

Nyt $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, missä $a = \partial_1\partial_1 f(\bar{0})$, $b = \partial_1\partial_2 f(\bar{0})$, ja $c = \partial_2\partial_2 f(\bar{0})$, eli

$$Q(h,k) = 2h^2 - 2k^2,$$

joka on positiivinen kun $k = 0$ ja $h \neq 0$, ja negatiivinen kun $h = 0$ ja $k \neq 0$, eli $Q(h,k)$ on indefiniitti, eli $(0,0)$ on <u>satulapiste</u>.

Tehtävä 3. Määritä funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kriittiset pisteet, ja mahdolliset lokaalien ääriarvokohtien laatu, kun

$$f(x_1,x_2) = x_1^2(1+x_2^2).$$

Ratkaisu. Tämäkin ratkaisu on hyvin samankaltainen kuin edelliset. Funktio f kuuluu taas luokkaan $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, joten se on jatkuvasti derivoituva mielivaltaisen monta kertaa ja erityisesti $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f$, jota käytetään alempana.

Lasketaan ensin millä vektorin $\bar{x} = (x_1,x_2)$ arvoilla funktion derivaatta (gradientti) on nolla.

$$\begin{aligned}
\nabla f(\bar{x}) &= (\partial_1 x_1^2(1+x_2^2), \partial_2 x_1^2(1+x_2^2)) \\
&= (2x_1(1+x_2^2), x_1^2 \cdot 2x_2) \\
&= (2x_1(1+x_2^2), 2x_1^2 \cdot x_2) = (0,0).
\end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö toteutuu kun $2x_1(1+x_2^2) = 0$ ja $2x_1^2x_2 = 0$. Viimeinen yhtälö toteutuu täsmälleen kun jompi kumpi muutujista on nolla. Jos x_2 on nolla, niin ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että myös x_1 on nolla. Eräs kriittinen piste on siis origo. Jos x_1 on nolla, niin molemmat yhtälöt toteutuvat, eli myös kaikki pisteet muotoa $(0,x_2)$ ovat kriittisiä. Koska origo on myös tätä muotoa oleva piste, *kaikki* kriittiset pisteet ovat tätä muotoa ja riittää tarkastella vain niitä.

Kriittisten pisteiden laatua voi yrittää selvittää laskemalla funktion toiset derivaatat ja tutkimalla Hessin toisen asteen neliömuotoa. Toiset derivaatat:

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_1 f(\bar{x}) &= \partial_1 2x_1(1+x_2^2) \\
&= 2(1+x_2^2) \\
\partial_2\partial_2 f(\bar{x}) &= \partial_2 2x_1^2 x_2 \\
&= 2x_1^2 \\
&\overset{x_1\mapsto 0}{=} 0 \\
\partial_2\partial_1 f(\bar{x}) &= \partial_2 2x_1(1+x_2^2) \\
&= 4x_1x_2 \\
&\overset{x_1\mapsto 0}{=} 0 \\
\partial_1\partial_2 f(\bar{x}) &= \partial_2\partial_1 f(\bar{x}),\ \text{kuten yllä todettiin.}
\end{aligned}$$

Nyt $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$, missä $a = \partial_1\partial_1 f(0,x_2)$, $b = \partial_1\partial_2 f(0,x_2)$, ja $c = \partial_2\partial_2 f(0,x_2)$, eli

$$Q(h,k) = 2(1+x_2^2)h^2,$$

joka on positiivinen kun $h \neq 0$ mutta saa arvon nolla kun $h = 0$ ja $k \neq 0$. Muoto $Q(h,k)$ on silloin *positiivisesti semidefiniitti* ja kuten kirjan sivulla 65 todetaan *tilanne pitää tutkia erikseen.*

Kiinnnitetään mielivaltainen piste $(0,x_2)$ ja näytetään että se on lokaali minimi. Itse asiassa se on globaali minimi (mutta ei aito): funktion $f(x_1,x_2) = x_1^2(1+x_2^2)$ kaikki arvot ovat selvästi suurempia tai yhtäsuuria kuin $0 = f(0,x_2)$, eli kirjan määritelmän 2.9.1 $(0,x_2)$ on selvästi lokaali minimi.

Tehtävä 4. Kuinka neliömuto

$$q(h,h) = h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2,\ \ h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$$

käyttäytyy origon ympäristössä?

Ratkaisu. Huom: kirjan merkintöjen mukaan, $q(h,h) = Q(h_1,h_2)$, missä $h = (h_1,h_2)$ (ks. sivut 64-66). Alla kaksi vaihtoehtoista ratkaisua.

Ratkaisutapa 1. Kyseinen neliömuoto on

$$ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2,$$

jossa $a = c = 1$ ja $b = 2$, eli vastaavaa Hessin matriisi on

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Kurssin tiedoista (esim. kirjan sivulla 66 on annettu tällainen informaatio) saadaan, että tällainen neliömuoto on indefiniitti täsmälleen silloin kun $ac - b^2 < 0$. Meidän tapauksessa näin juuri onkin: $ac - b^2 = 1 \cdot 1 - 2^2 = -3$. Origo on siis funktion $Q(h_1,h_2)$ satulapiste. Toisin sanoin origon mielivaltaisessa ympäristössä $q(h,h)$ voi saada sekä negatiivisia että positiivisia arvoja.

Ratkaisutapa 2. Tässä ratkaisutavassa pyritään olla viittaamatta kurssilla todistettuihin tunnetuihin tuloksiin.

Oletetaan ensin että $h_1 h_2 > 0$. Silloin

$$q(h,h) = h_2^2 + 4h_1h_2 + h_2^2 > h_2^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 = (h_1 + h_2)^2 \geqslant 0,$$

eli tässä tapauksessa $q(h,h) > 0$. Selvästi mielivaltaisen lähellä origoa löytyy sellaisia (h_1, h_2) joille $h_1h_2 > 0$, eli mielivaltaisen lähellä origoa $q(h,h)$ saa positiivisia arvoja.

Oletetaan sitten, että $h_1 = -h_2$ ja $h_1 \neq 0$. Nyt muun muassa $h_1h_2 < 0$, eli $h_1h_2 = -|h_1h_2|$. ja tietenkin myös $h_1^2 = h_2^2$. Nyt

$$q(h,h) = h_1^2 + h_2^2 + 4h_1h_2 = 2h_1^2 - 4h_1^2 = -2h_1^2 < 0.$$

Toisaalta mielivaltaisen lähellä origoa on sellaisia (h_1, h_2) joille $h_1 = -h_2$ ja $h_1 \neq 0$, eli mielivaltaise lähellä origoa $q(h,h)$ saa myös negatiivisia arvoja.

Saadaan siis, että $q(h,h)$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja mielivaltaisissa origon ympäristöissä, eli on satulapiste.

Tehtävä 5. Olkoon $q(h,h)$ positiivideniitti neliömuoto tasossa. Osoita, että on olemassa $C > 0$ jolle

$$q(h,h) \geqslant C|h|^2.$$

Ratkaisu. Neliömuoto $q(h,h)$ on muotoa $ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$, missä $h = (h_1, h_2)$. Se on positiividefiniitti, eli $q(h,h) > 0$ kaikilla $h \neq 0$. Kirjassa sivulla 66 mainitaan, että tästä seuraa, että $a > 0$ ja $ac - b^2 > 0$. Tämä on helppo nähdä: jos $a < 0$, niin valitsemalla $h_2 = 0$ ja $h_1 \neq 0$, saadaan $q(h,h) \leqslant 0$. Toisaalta jos $ac - b^2 \leqslant 0$, niin $|b| \geqslant \sqrt{|ac|}$, jolloin nähdään

$$ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \leqslant (\sqrt{a}h_1)^2 + 2|b||h_1||h_2| + (\sqrt{c}h_2)^2 \leqslant (\sqrt{a}h_1 + \sqrt{b}h_2)^2,$$

josta viimeinen on 0 jos valitaan $(h_1, h_2) = (\sqrt{b}, -\sqrt{a})$.

Ratkaisutapa 1. Kirjoitetaan $q(h,h)$ muodossa $h \cdot Ah$, missä A on symmetrinen matriisi. Funktio $h \mapsto h \cdot Ah$ on jatkuva, joten se saavuttaa yksikköpallossa pienimmän arvon, koska yksikköpallo on kompakti. Toisin sanoin on olemassa k_0 siten että $|k_0| = 1$ ja $k_0 \cdot Ah_0 \leqslant k \cdot Ak$ kaikilla k joille $|k| = 1$. Asetetaan

$$C = k_0 \cdot Ak_0 \leqslant k \cdot Ak.$$

C on positiivinen, koska $q(h,h)$ on positiividefiniitti. Nyt mielivaltaiselle h pätee (sijoittamalla $k = h/|h|$ y.o. yhtlss):

$$\frac{h}{|h|} \cdot A\frac{h}{|h|} = \frac{h}{|h|} \cdot \frac{Ah}{|h|} \geqslant C,$$

mistä väite seuraa kertomalla puolittain $|h|^2$:lla.

Ratkaisutapa 2. Riittää osoittaa, että löytyy sellainen C jolle

$$ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 - Ch_1^2 - Ch_2^2 \geqslant 0.$$

Tätä varten valitaan $C_1 > 0$ niin että $a - C_1 > 0$ (esimerkiksi $C_1 = a/2$). Sen jälkeen valitaan $C_2 > 0$ niin että $c - C_2 > 0$ (esim. $C_2 = c/2$). Sitten valitaan $C_3 > 0$ niin pieneksi, että $\sqrt{(a - C_3)(c - C_3)} > |b|$. Tämä on mahdollista, koska oletuksen mukaan $ac - b^2 > 0 \iff \sqrt{ac} > |b|$ ja koska funktio

$$x \mapsto \sqrt{(a - x)(c - x)}$$

on jatkuva nollassa. Määritellään nyt

$$C = \min\{C_1, C_2, C_3\}.$$

Luvusta C tulee positiivinen, koska luvut C_i olivat valittu kaikki positiivisiksi ja luvulle C pätevät kaikki nämä epäyhtälöt:

$$a - C > 0 \tag{1}$$

$$c - C > |b| \tag{2}$$

$$\sqrt{(a - C)(c - C)} > |b|. \tag{3}$$

Voidaan nyt arvioida:

$$\begin{aligned} q(h,h) - C|h|^2 &= ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 - Ch_1^2 - Ch_2^2 \\ &= (a - C)h_1^2 - 2|bh_1h_2| + (c - C)h_2^2 \\ &\overset{(3)}{\geqslant} (a - C)h_1^2 - 2\sqrt{(a - C)(c - C)}|h_1||h_2| + (c - C)h_2^2 \\ &= \left(\sqrt{a - C}|h_1| - \sqrt{c - C}|h_2|\right)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Neliöjuuren ottaminen on mahdollista kohtien (1) ja (2) nojalla.

Tehtävä 6. Oletetaan, että funktio $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ Hessen matriisi $\nabla^2 f(x_0)$ kriittisessa pisteesa x_0 on indefiniitti. Osoita, että f:llä ei ole lokaalia ääriarvokohtaa pisteesa x_0.
Ratkaisu. Olkoon $\delta > 0$ ja todistetaan, että on olemassa y ja z, joiden etäisyys x_0:sta on pienempi kuin δ ja joille pätee $f(y) < f(x_0)$ ja $f(z) > f(x_0)$. Tätä varten olkoon $h = (h_1, h_2)$ sellainen piste, että

$$Q(h_1, h_2) < 0 \tag{1}$$

($Q(h_1, h_2)$ on kuten kirjassa s. 64 ja $Q(h_1, h_2) = (h_1, h_2) \cdot [\nabla^2 f(x_0) \cdot (h_1, h_2)]$). Sekä olkoon $k = (k_1, k_2)$ sellainen että $Q(k_1, k_2) > 0$. Tällaiset h ja k ovat olemassa koska matriisi oletettiin indefiniitiksi. Olkoon nyt $\gamma(t) = x_0 + th$. Lasketaan ketjusäännöllä yhden muuttujan funktion $f(\gamma(t))$ toinen derivaatta:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dx} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \gamma'(t) \cdot [\nabla^2 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] + \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t).$$

On helppo laskea että $\gamma'(t) = h$ ja $\gamma''(t) = 0$, joten saadaan

$$\frac{d^2}{dx^2} f(\gamma(t)) = h \cdot [\nabla^2 f(\gamma(t)) \cdot h].$$

Sijoittamalla $t = 0$, saadaan $\gamma(0) = x_0$, eli

$$\frac{d^2}{dx^2} f(\gamma(0)) = h \cdot [\nabla^2 f(\gamma(t)) \cdot h] = Q(h_1, h_2) < 0,$$

oletuksen (1) mukaan. Toisen muuttujan differentiaalilaskennasta tiedetään, että tästä seuraa, että yhden muuttujan funktiolla $f(\gamma(t))$ on nollassa aito lokaali maksimi, eli on olemassa $t_0 < \delta/|h|$ jolle pätee

$$f(\gamma(t_0)) < f(\gamma(0))$$

joka on ekvivalenttia sen kanssa että

$$f(x_0 + t_0 h)) < f(x_0)$$

ja pisteen $y = x_0 + t_0 h$ etäisyys x_0:sta on pienempi kuin δ:

$$|y - x_0| = |x_0 + t_0 h - x_0| = |t_0 h| < \frac{\delta}{h} \cdot h = \delta.$$

Valitsemalla $\gamma(t) = x_0 + tk$ löydetään samalla tavalla piste z jolle $f(z) > f(x_0)$ ja $|z - x_0| < \delta$.

Tästä seuraa, että x_0 ei voi olla lokaali ääriarvokohta.