

Vektorianalyysi, harj. 1

1. Mitään $\|x\|\|y\| = |x \cdot y|$?Yhtälö pätee selvästi, jos $x=0$ t. $y=0$. Ol., että $x, y \neq 0$:1° Ol., että $\exists t \in \mathbb{R}$ s. e. $tx+y=0$

$$\Rightarrow 0 = |tx+y|^2 = (tx+y) \cdot (tx+y)$$

$$= \dots = t^2|x|^2 + 2tx \cdot y + |y|^2 = at^2 + 2tb + c$$

$$\Leftrightarrow 0 = at^2 + 2tat\frac{b}{a} + a\frac{b^2}{a^2} - a\frac{b^2}{a^2} + c$$

$$= a\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$$

Koska polynomilla $p(t) = at^2 + 2bt + c$ on yf:n' & korkeintaan yf:n' ($|tx+y|^2 \geq 0 \forall t$) 0-kohdat, täytyy olla $c - b^2/a = 0 \Leftrightarrow ac = b^2$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2\|y\|^2 = (x \cdot y)^2 \Leftrightarrow \|x\|\|y\| = |x \cdot y|$$

2° Ol., että $\forall t \in \mathbb{R}$ pätee $0 < |tx+y|^2$

= Kuten edellä, saadaan

$$0 < a\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a} \quad \forall t$$

$$\Rightarrow c - \frac{b^2}{a} > 0 \Leftrightarrow ac > b^2 \Leftrightarrow \|x\|^2\|y\|^2 > (x \cdot y)^2$$

$$\Rightarrow \|x\|\|y\| > |x \cdot y|$$

Siis yhtämyyden pitää Cauchy-Schwarzin

jok & vain jos $\exists t \in \mathbb{R}$ s. e.

$tx+y=0$ (Tämä vastaus sisältää myös tapauksen $x=y=0$).

VA, 1

2. Kolmeperästä (ei siis Cauchy-Schwarzin)

varsin suoli: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\|$.

$$\text{Tod. } \|x\| = \|(x+y) - y\| = \|(x+y) + (-y)\| \leq \|x+y\| + \|-y\|$$

$$= \|x+y\| + |-1|\|y\| = \|x+y\| + \|y\|$$

(missä käytettiin Δ -o.s.:n oikeata puolta).

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$$

$$\Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\|$$

(koska $\|x+y\| \geq 0$). $\square$

$$3. \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(missä $\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}$).

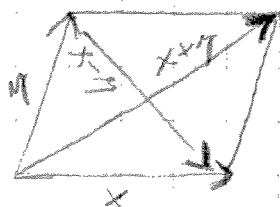
$$\text{Tod. } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y) \cdot (x+y) + (x-y) \cdot (x-y)$$

$$= x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y + x \cdot x - x \cdot y - y \cdot x + y \cdot y$$

$$= 2x \cdot x + 2y \cdot y = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(sillä esim. $x \cdot (-y) = \sum x_k(-y_k) = -\sum x_k y_k = -x \cdot y$). $\square$

Nim. suunnikkaassa, ks. kuva.



Sis. 2 kertaa viereltäisten
viiden pituusien nelaiden
summa = lävistäjien
pituusien nelaiden summa.

$\forall A, 1$

3/5

4. Olk. $|x| = \sum |x_k|$, $\|x\| = (\sum |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$, missä
 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $\exists C_1, C_2 > 0$ t.e.

$$C_1 \|x\| \leq |x| \leq C_2 \|x\|.$$

eli normit $\|x\|$ & $|x|$ ovat ekvivalentit.

1^o $\|x\| \leq |x|$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 \leq |x|^2 \Leftrightarrow \sum x_k^2 \leq (\sum x_k)^2 = (\sum x_i) (\sum x_k)$$

$$\Leftrightarrow \sum |x_k|^2 \leq \sum |x_i| |x_k| = \sum_{i=k} |x_i| |x_k| + \sum_{i \neq k} |x_i| |x_k|$$

$$\Leftrightarrow \sum |x_k|^2 \leq \sum |x_k|^2 + \sum_{i \neq k} |x_i| |x_k| \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{i \neq k} |x_i| |x_k|$$

2^o (*) $|x| \leq n \|x\|$

Jos $x=0$, (*) on selvä. Olk. sitten $x \neq 0$, jolloin
 $\|x\| > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{|x|}{\|x\|} \leq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|} \sum |x_k| = \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\|x\|} \leq \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\text{joten pätee, sillä } |x_k| = (x_k^2)^{1/2} \leq (\sum x_i^2)^{1/2} = \|x\|$$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{ joten } \frac{|x_k|}{\|x\|} \leq 1$$

$$1^{\circ} \& 2^{\circ} \Rightarrow \|x\| \leq |x| \leq n \|x\|$$

(joten voidaan val. $C_1=1$, $C_2=n$). $\square$

VA, 1

4/5

5. Olk. $x, y \in \mathbb{R}^n$ & $\|x\| = \|y\| = 1$.

V. Vektorit x, y suurin mahdollinen pituus on 2.

Tod. 1^o Val. $y = -x$

$$\Rightarrow \|x - y\| = \|x - (-x)\| = \|2x\| = |2| \|x\| = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad \|x - y\|^2 &= (x - y) \cdot (x - y) = x \cdot x + x \cdot (-y) - y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2 = 1 - 2x \cdot y + 1 = 2 + 2(-x \cdot y) \\ &\leq 2 - 2(-1) = 4 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \|y\| = 1, \text{ silloin} \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzin mukaan

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|, \text{ joten } -x \cdot y \leq \|x\| \|y\| = 1 \stackrel{!}{=} 1.$$

$$\Rightarrow \|x - y\| \leq \sqrt{4} = 2 \quad \forall x, y, \|x\| = \|y\| = 1. \quad \square$$

$\forall A, 1$

5/5

6. Oll. , että $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu. Tällöin $\partial A \subset A$.

Tol. 1^o Oll. $x_0 \in \partial A$. Osoitetaan, että $x_0 \in A$.

$$\text{Mää.} \Rightarrow \partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ ja } B(x, r) \cap \mathbb{R}^n \setminus A \neq \emptyset\}.$$

$$\text{Val. } x_k \in B(x_0, 1/k) \cap A \quad \forall k.$$

$$\Rightarrow \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k} \quad \forall k \quad \& \quad x_k \in A \quad \forall k$$

$$\Rightarrow (x_k) \text{ on jono } A: \text{m} \& \quad x_k \rightarrow x_0$$

Koska A on suljettu, $x_0 \in A, \Rightarrow \partial A \subset A$.

$$2^{\circ} \partial A = \emptyset \Rightarrow \partial A = \emptyset \subset A. \quad \square$$