

## Tilastollisen päättelyn jatkokurssi, sl 2010, HT 6, viikko 42

1. Osoita, että hypoteesi  $A\theta_0 = c$ , jossa matriisi  $A$  ( $q \times d$ ) ja vektori  $c$  ( $q \times 1$ ) ovat tunnettuja ja  $r(A) = q$ , ja hypoteesi  $\theta_0 = B\delta_0 + e$ , jossa matriisi  $B$  ( $d \times (d - q)$ ) ja vektori  $e$  ( $d \times 1$ ) ovat tunnettuja ja  $r(B) = d - q$ , ovat yhtäpitäviä.

*Vihje:* Koska matriisin  $A$  rivit ovat lineaarisesti riippumattomat (eli vapaat), niin lineaarialgebrasta tiedetään, että on olemassa lineaarisesti riippumattomat vektorit  $m_1, \dots, m_{d-q}$  ( $d \times 1$ ) siten, että  $d \times d$  matriisi  $P = [A' : M]$ , jossa  $M = [m_1 : \dots : m_{d-q}]$ , on epäsingulaarinen ja matriisien  $A'$  ja  $M$  sarakevektorit ovat ortogonaaliset eli  $AM = 0$ .

2. Jatkoa HT:lle 4.1 ja 5.2. Tarkastellaan hypoteesia  $H_0 : \beta_0 = 0$ , jonka voimassa ollessa selittävällä muuttujalla  $x_i$  ei ole vaikutusta.

(i) Esitä parametrin  $\theta = (\alpha, \beta)$  pistemääräfunktion ja rajoittamattoman SU-estimaattorin  $\hat{\theta}$  asymptoottinen jakauma, kun  $\hat{\theta}$ :n tarkentuvuuden ja tarvittavien konvergenssien oletetaan pätevän (ks. moniste s. 31-33).

(ii) Esitä Waldin testi hypoteesille  $H_0$ , kun vaihtoehtoinen hypoteesi on  $\beta_0 \neq 0$ .

(iii) Esitä edellisen kohdan Waldin testiin perustuva 95%:n luottamusväli parametrille  $\beta$ .

*Huom.:* Tässä tapauksessa SU-estimaattorin lauseketta ei voida ratkaista analyytisesti. Kohdan (iii) luottamusvälin muodostamisen voi palauttaa mieleen tilastollisen päättelyn kurssin luentomonisteen jaksosta 6.4.

3. Jatkoa edelliselle. (i) Johda parametrin  $\theta = (\alpha, \beta)$  rajoitettu (eli  $H_0$ :n rajoittama) SU-estimaattori  $\tilde{\theta}$ .

(ii) Mikä on rajoitetun SU-estimaattorin  $\tilde{\theta}$  asymptoottinen jakauma?

(iii) Esitä Raon pistemäärätesti  $H_0$ :lle, kun vaihtoehtoinen hypoteesi on  $\beta_0 \neq 0$  ja edellisessä tehtävässä oletettujen konvergenssitulosten oletetaan pätevän.

*Huom.:* Rajoitettua SU-estimaattoria on käsitelty monisteen s. 38 ja tilastollisen päättelyn kurssin luentomonisteen jaksossa 5.7 (s. 71).

4. Jatkoa kahdelle edelliselle. Tarkastellaan testausongelmaa nyt tapauksessa, jossa vaihtoehtoinen hypoteesi on  $\beta_0 > 0$ . Esitä Waldin ja Raon testit tässä tapauksessa.

*Huom.:* Tässä tapauksessa mallia voi katsoa tilastollisen päättelyn kurssin luentomonisteen s. 68-69.