Tilastollisen päättelyn jatkokurssi, sl 2010, HT 5, viikko 41

1. Jatkoa HT:lle 3.4 ja 4.2. (i) Johda parametrivektorin $\theta = (\phi, \sigma^2)$ SU–estimaatti, kun parametriavaruus on $(\phi, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(ii) Perustele miksei parametrin ϕ SU–estimaattori $\hat{\phi}$ ole harhaton eli $\mathsf{E}_\theta(\hat{\phi}) \neq \phi$ (tarkkaa matemaattista todistusta ei vaadita).

Huom.: Osa (ii) osoittaa, että monisteen s. 21 tarkastellussa lineaarisessa mallissa tavanomaiset lineaarisen mallin SU–estimoinnin (ja siten myös viimeisessä tehtävässä tarkasteltavan F-testin) eksaktit tulokset eivät päde, jos selittävien muuttujien vektorissa Z_i on mukana selitettävän muuttujan edeltäviä arvoja tai yleisemmin yhtälössä (2.16) ehto $(\boldsymbol{W}_{i-1}, X_i) \perp\!\!\!\perp \varepsilon_i$ ei päde.

2. (i) Osoita, että HT:n 4.1 pistemääräfunktio on martingaali informaatiojoukon $\boldsymbol{Y}_n = (Y_1, ..., Y_n)$ suhteen.

(ii) Osoita, että HT:ien 3.4 ja 4.2 pistemääräfunktio on martingaali informaatiojoukon $\boldsymbol{Y}_n = (Y_1, ..., Y_n)$ suhteen.

(iii) Osoita, että HT:n 4.3 ehdolliseen uskottavuusfunktioon perustuva pistemääräfunktio on martingaali informaatiojoukon $(\boldsymbol{Y}_n, \boldsymbol{Z}_{n+1}) = (Y_1, ..., Y_n, Z_1, ..., Z_{n+1})$ suhteen, kun $\mathsf{E}\left[\|\partial g(z; \beta) / \partial \beta\|\right] < \infty$.

Vihje: Ks. HT 3.1.

3. Tarkastellaan monisteen yhtälössä (2.16) esitettyä lineaarista mallia ja sille esitettyjä SU–estimaattoreita $\hat{\beta}$ ja $\hat{\sigma}^2$ (ks. s. 21-22). Oletetaan, että selittävät muuttujat toteuttavat monisteen ehdon (2.26) (ks. s. 27) ja lisäksi ehdon $\mathsf{E}(Z_{a,i}^2) \leq C < \infty$ kaikilla $a = 1, ..., p$ ja $i \geq 1$.

(i) Osoita SU–estimaattorin $\hat{\sigma}^2$ tarkentuvuus eli $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$.

(ii) Tarkastellaan nyt HT:n 4.3 epälineaarista yleistystä ja parametrin σ^2 SU–estimaattoria $\hat{\sigma}^2$. Oletetaan, että SU–estimaattorin $\hat{\beta}$ tiedetään olevan tarkentuva. Esitä riittävä ehto, joka takaa SU–estimaattorin $\hat{\sigma}^2$ tarkentuvuuden tässä tapauksessa.

Vihje: Kohdassa (i) voi estimaattorin $\hat{\sigma}^2$ lausekkeessa kirjoittaa $Y_i - Z_i'\hat{\beta} = (Y_i - Z_i'\beta) + Z_i'(\hat{\beta} - \beta)$. Korottamalla puolittain neliöön, summaamalla yli indeksien $i = 1, ..., n$ ja jakamalla summa n:llä saadaan estimaattorille $\hat{\sigma}^2$ kehitelmä, jonka avulla tarkentuvuus voidaan todeta. Kehitelmän tekijöissä voi käyttää SLL:ia, monisteen ehtoa (2.26) ja PNS–estimaattorin $\hat{\beta}$ monisteessa s. 26-27 todettua tarkentuvuutta.

4. Tarkastellaan samaa lineaarista mallia kuin edellisessä tehtävässä ja oletetaan, että monisteen s. 30-31 esitetty PNS–estimaattorin $\hat{\beta}$ asymptoottinen normaalisuus pätee eli

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\left(0, \sigma^2 Q^{-1}\right).$$

(jatkuu seuraavalla sivulla)

Asetetaan parametrille β lineaarinen hypoteesi $\mathsf{H}_0 : A\beta = c$, jossa matriisi A $(q \times p)$ ja vektori c $(q \times 1)$ ovat tunnettuja ja A:n aste on q. Vaihtoehtoinen hypoteesi on $A\beta \neq c$. Seuraavassa oletetaan, että H_0 on voimassa.

(i) Osoita, että $\sqrt{n}(A\hat{\beta} - c) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\left(0, \sigma^2 A Q^{-1} A'\right)$.

(ii) Lineaarisen mallin kurssilla esitetty F–testisuure voidaan kirjoittaa

$$F = n(A\hat{\beta} - c)' \left[A \left(n^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^{n} Z_i Z_i' \right)^{-1} A' \right]^{-1} (A\hat{\beta} - c)/qS^2,$$

jossa $S^2 = n\hat{\sigma}^2/(n-p)$. Osoita, että $qF \xrightarrow{d} \chi^2_q$.

Vihje: Kohdassa (i) Lause 1.3 ja multinormaalijakauman ominaisuudet (vrt. HT:n 3.5 vihje). Kohdassa (ii) kohta (i), oletus (2.26) ja estimaattorin S^2 tarkentuvuus σ^2 estimaattorina (vrt. HT 2.3(ii)) yhdistettynä Lauseeseen 1.1, Seuraus 1.2 ja HT:n 1.5 vihje.