Tilastollisen päättelyn jatkokurssi, sl 2010, HT 3, viikko 39

1. Osoita, että monisteen Esimerkin 1.1 kohdissa (ii) ja (iii) (ks. s. 12) määritellyille sm–jonolle pätee väitetty MD–ominaisuus.

2. Olkoon $X_1, X_2, ...$ $(k \times 1)$ vektoriarvoinen MD–jono, jonka komponenteilla on äärelliset toiset momentit, ja $M_n = X_1 + \cdots + X_n$. Oletetaan lisäksi, että $\mathsf{E}\,(X_1) = 0$. Osoita yksityiskohtaisesti monisteen s. 11 mainittu MD–jonon korreloimattomuustulos eli $\mathsf{Cov}\,(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Cov}\,(X_i)$.

3. Oletetaan, että sv:t X ja Z $(k \times 1)$ ovat riippumattomia ja $Z \sim \mathsf{N}_k\,(\mu, \Sigma)$. Osoita, että sv:n $Y = X + Z$ ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$ on $\mathsf{N}_k\,(\mu + x, \Sigma)$ eli symbolein $Y|\,(X = x) \sim \mathsf{N}_k\,(\mu + x, \Sigma)$.

Vihje: Voit olettaa, että X:n jakauma on jatkuva (tulos pätee myös ilman tätä oletusta). Tarkastele lineaarista muunnosta $(Z, X) \mapsto (Y, X)$ ja johda (Y, X):n yhteistiheysfunktio käyttäen tunnettua satunnaisvektoreiden muunnosten jakaumatulosta (ks. esim. Koistinen: *Todennäköisyyslaskennan kurssin luentomoniste*, 11. joulukuuta 2009, s. 119–120)[1]. Tämän jälkeen saat kysytyn ehdollisen jakauman tiheysfunktion käyttäen tavanomaista kaavaa ja riippumattomuutta $X \perp\!\!\!\perp Z$.

4. Tarkastellaan monisteen s. 13 määriteltyä autoregressiivista aikasarjamallia. Perustele monisteen s. 17 esitetty tähän malliin liittyvän ytf:n lauseke

$$f_{\boldsymbol{Y}}\,(\boldsymbol{y}; \theta) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \phi y_{i-1})^2\right\}, \quad \theta = \left(\phi, \sigma^2\right).$$

Vihje: Johda ensin sv:n $(Y_i, \boldsymbol{Y}_{i-1})$ ytf $f_{Y_i,\boldsymbol{Y}_{i-1}}$ käyttämällä (kääntäen yksikäsitteistä) muunnosta $(\varepsilon_i, \boldsymbol{Y}_{i-1}) \mapsto (Y_i, \boldsymbol{Y}_{i-1})$ ja tehtävän 2 vihjeessä mainittua sv:ien tf:den muunnoskaavaa (tämän muunnoksen Jacobin determinantti on ykkönen). Käytä tämän jälkeen (ellei jo aikaisemmin) riippumattomuutta $\boldsymbol{Y}_{i-1} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_i$ ja ehdollisen tf:n kaavaa $f_{Y_i|\boldsymbol{Y}_{i-1}} = f_{Y_i,\boldsymbol{Y}_{i-1}}/f_{\boldsymbol{Y}_{i-1}}$.

5. Tarkastellaan monisteen mallin (2.2) yleistystä

$$Y_j = Z_j\beta_j + \varepsilon_j, \qquad j = 1, ..., N,$$

jossa Z_i $(n_j \times p)$ on kiinteä (ei-satunnainen) selittävien muuttujien matriisi ja $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N$ $\perp\!\!\!\perp$, $\varepsilon_j \sim \mathsf{N}_{n_j}\left(0, \sigma^2 I_{n_j}\right)$. Oletetaan, että kerroinvektori β_j $(p \times 1)$ on satunnainen ja toteuttaa

$$\beta_1, ..., \beta_N \perp\!\!\!\perp, \;\; \beta_j \sim \mathsf{N}_p\,(\beta, \Omega) \quad \text{ja} \quad (\beta_1, ..., \beta_N) \perp\!\!\!\perp (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)\,.$$

Johda tähän liittyvä tilastollinen malli eli sv:n $\boldsymbol{Y}_n = (Y_1, ..., Y_n)$ ytf modifioimalla monisteen malliin (2.2) liittyvää tarkastelua (ks. s. 14-15).

(jatkuu seuraavalla sivulla)

[1] http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=48308040

Vihje: Ratkaisussa oletetaan tunnetuksi eräitä perustietoja multinormaalijakaumasta (erityisesti tieto, että kahden riippumattoman samanulotteisen multinormaalijakautuneen satunnaisvektorin summa on multinormaalinen ja lisäksi multinormaalijakauman lineaariset muunnokset (ks. esim. Koistinen: *Todennäköisyyslaskennan kurssin luentomoniste*, 11. joulukuuta 2009, luku 9).