Tilastollisen päättelyn jatkokurssi, sl 2010, HT 1, viikko 37

1. (i) Oletetaan, että sm–jonoille Y_n ja Z_n pätee $0 \leq Y_n \leq Z_n$ ja $Z_n \xrightarrow{p} 0$. Osoita, että $Y_n \xrightarrow{p} 0$.
(ii) Oletetaan nyt, että Y_n ja Z_n ovat $k \times 1$ vektoreita, joille pätee $0 \leq \|Y_n\| \leq \|Z_n\|$ ja $Z_n \xrightarrow{p} 0$. Osoita, että $Y_n \xrightarrow{p} 0$.

2. Olkoon $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ avoin väli, $h : \Theta \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio ja $h'(\theta_0) \neq 0$. Tarkastellaan parametrin θ_0 asymptoottisesti normaalia estimaattoria $\hat{\theta}_n$, jolle pätee

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\left(0, \sigma^2(\theta_0)\right), \quad \sigma^2(\theta_0) > 0.$$

Osoita, että estimaattori $\hat{\theta}_n$ on tarkentuva eli $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

Vihje: Sovella ensin monisteen Lauseita 1.4 ja 1.3 tai Seurausta 1.1 ja sen jälkeen monisteen s. 5 puolenvälin jälkeen mainittua tulosta, jonka mukaan jakaumakonvergenssista $U_n \xrightarrow{d} c$ (c vakio) seuraa stokastinen konvergenssi $U_n \xrightarrow{p} c$.

3. (Jatkoa edelliselle) Osoita deltamenetelmän tulos (ks. monisteen s. 5–6)

$$\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0)) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\left(0, [h'(\theta_0)]^2 \sigma^2(\theta_0)\right).$$

Vihje: Väliarvolauseen nojalla $h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0) = h'(\bar{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, jossa välipiste $\bar{\theta}_n = c\hat{\theta}_n + (1-c)\theta_0$, $0 \leq c \leq 1$, ja c:n riippuvuutta n:stä ei ole merkitty näkyviin. Päättele estimaattorin $\hat{\theta}_n$ tarkentuvuuden ja HT:n 1 avulla tulos $\bar{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$ ja käytä tämän jälkeen $\hat{\theta}_n$:n asymptoottista normaalisuutta ja monisteen Lauseita 1.1, 1.4 ja 1.3 tai Seurausta 1.1.

4. (Jatkoa kahdelle edelliselle). Johda standardoidun muuttujan

$$\frac{\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0))}{h'(\hat{\theta}_n)\sigma(\hat{\theta}_n)}$$

asymptoottinen jakauma, kun funktio $\theta \mapsto \sigma^2(\theta)$ on jatkuva pisteessä θ_0.

Vihje: Sovella samoja lauseita kuin edellisessäkin.

5. Oletetaan, että parametrivektorille θ_0 ($d \times 1$) on käytettävissä asymptoottisesti normaalinen estimaattori $\hat{\theta}_n$ eli

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}_d\left(0, \Sigma(\theta_0)\right),$$

jossa kovarianssimatriisi on positiivisesti definiitti (ja siten epäsingulaarinen eli kääntyvä). Oletetaan lisäksi, että funktio $\theta \longmapsto \Sigma(\theta)$ on jatkuva pisteessä θ_0. Osoita, että

$$n(\hat{\theta}_n - \theta_0)'\Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \chi^2_d.$$

Vihje: Voit tässäkin soveltaa samoja lauseita kuin edellisissä ja lisäksi lineaarisen mallin kurssilla esitettyä tulosta $Z'\Sigma^{-1}Z \sim \chi^2_k$, kun $Z \sim \mathsf{N}_k(0, \Sigma)$ ja Σ ($k \times k$) on positiivisesti definiitti.