Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 9, viikko 7

Kaksi ensimmäistä tehtävää on tarkoitus ratkaista käyttäen joko JMulti- tai R-ohjelmistoa, jotka saa käyttöön kurssisivulla mainituista linkeistä. Aineistoina olevat aikasarjat lake ja ukwages löytyvät myös kurssisivulta samoin kuin R-ohjelmistoa käytettäessä tarvittavat koodit ohjeineen. Ratkaisut (eli empiiristen analyysien tulokset) tulostetaan ja palautetaan harjoitustilaisuudessa.

1. (i) Valitse estimoitua autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktiota apuna käyttäen ARMA-malli lake-sarjalle ja estimoi valitsemasi mallin parametrit SU-menetelmällä.

(ii) Tutki estimoimasi mallin riittävyyttä monisteen s. 48-50 esitettyjä residuaalitarkasteluja käyttäen ja vertaa valittua mallia myös joihinkin "naapurimalleihin" SU-estimointiin perustuvien mallinvalintakriteerien ja tilastollisten testien avulla.

2. Tee tehtävässä 1 kuvatut analyysit ukwages-sarjalle ottaen kuitenkin huomioon sarjan ilmeinen epästationaarisuus.

3. Tarkastellaan ARCH(1)-mallia $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\,(0,1)$, $h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2$, $\omega > 0$, $0 \leq \alpha < 1$. Kuten monisteessa on todettu, pätee tällöin $\mathsf{E}_{t-1}(y_t) = 0$ ja $\mathsf{Var}_{t-1}(y_t) = \mathsf{E}_{t-1}\left(y_t^2\right) = h_t$. Oletetaan nyt, että prosessista y_t havaitaan vain joka toinen arvo ja määritellään edellä mainitut ehdolliset momentit ehdollistaen muuttujien $y_{t-2}, y_{t-4}, ...$ eikä muuttujien $y_{t-1}, y_{t-2}, ...$ suhteen. Osoita, että (i) $\mathsf{E}\,(y_t\,|y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = 0$ ja (ii) $\mathsf{Var}\,(y_t\,|y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = \omega\,(1+\alpha) + \alpha^2 y_{t-2}^2$.

Vihje: Kohdassa (i) voit käyttää monisteen s. 33 esitetyn iteroidun odotusarvon lain (EO33) yleistystä, jonka mukaan $\mathsf{E}\,(Y\,|X_2) = \mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,(Y\,|X_1)\,|X_2]$, kun (mahdollisesti ääretönulotteisen) vektorin X_2 komponentit muodostavat X_1:n komponenttien osajoukon. Kohdan (ii) voi ratkaista muokkaamalla ensin yhtälöä $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$ niin, että y_t:n riippuvuus y_{t-2}:sta tulee eksplisiittiseksi ja laskemalla tämän jälkeen ehdollinen varianssi.

Huom.: Tulos yleistyy siten, että jos prosessista y_t havaitaan joka m. arvo, niin $\mathsf{Var}\,(y_t\,|y_{t-m}, y_{t-2m}, ...) = \omega\,(1-\alpha^m)\,/\,(1-\alpha) + \alpha^m y_{t-m}^2$, joten ehdollinen heteroskedastisuus heikkenee, kun havainnointitiheys harvenee.

4. Jatkoa edelliselle. (i) Oletetaan, että y_t:stä havaitaan vain joka toinen arvo. Osoita, että $\mathsf{Var}\,(y_t) = \mathsf{E}\left(y_t^2\right) = \omega/\,(1-\alpha)$ eli y_t:n ehdoton varianssi on sama kuin tilanteessa, jossa kaikki y_t:n arvot havaitaan. (ii) Oletetaan nyt, että $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\,(0,1)$ ja että $\alpha = 0.5$. Laske monisteen s. 58 esitettyä ARCH(1)-malliin liittyvää huipukkuuden kaavaa käyttäen y_t:n huipukkuus, kun y_t:stä havaitaan (a) jokainen arvo ja (b) vain joka toinen arvo.

Vihje: Kohdassa (b) voit käyttää tehtävän tulosta, jonka mukaan y_t on tässäkin tapauksessa ARCH(1)-prosessi, mutta "muunnetuilla parametriarvoilla".