Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 8, viikko 6

1. Jatkoa HT:lle 7.1. Olkoon

$$l^*\left(\boldsymbol{\phi},\sigma^2\right)=\frac{T-p}{2}\log\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=p+1}^{T}\left(y_t-\boldsymbol{y}_{t-1}'\boldsymbol{\phi}\right)^2,\qquad \boldsymbol{y}_{t-1}=\left(y_{t-1},...,y_{t-p}\right),$$

HT:n 7.1 ratkaisussa johdettu AR(p)-malliin liittyvä ehdollinen log-uskottavuusfunktio. Johda toisten derivaattojen matriisi

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\phi}\partial\boldsymbol{\phi}'}l^*\left(\boldsymbol{\phi},\sigma^2\right) & \frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\phi}\partial\sigma^2}l^*\left(\boldsymbol{\phi},\sigma^2\right)\\ \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\boldsymbol{\phi}'}l^*\left(\boldsymbol{\phi},\sigma^2\right) & \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}l^*\left(\boldsymbol{\phi},\sigma^2\right)\end{bmatrix}$$

ja olettaen stationaarisuus (eli stationaariset alkuarvot) laske sen odotusarvo eli $-1\times$ parametrin $\left(\boldsymbol{\phi},\sigma^2\right)$ Fisherin informaatiomatriisi. Päättele tuloksen avulla edelleen parametrin $\left(\boldsymbol{\phi},\sigma^2\right)$ asymptoottinen jakauma vetoamalla tavanomaiseen tilastollisen päättelyn kurssilla esitettyyn SU-estimaattorin asymptoottiseen jakaumatulokseen. Voit halutessasi rajoittua AR(1)-tapaukseen.

2. Tarkastellaan AR(1)-prosessista $y_t=\phi y_{t-1}+\varepsilon_t,\ \varepsilon_t\sim\mathsf{nid}\left(0,\sigma^2\right),\ |\phi|<1$, saatua realisaatiota $\mathbf{y}=(y_1,...,y_T)$. Kuten monisteen s. 44, pätee (satunnaiseksi tulkitulle realisaatiolle) $\mathbf{y}\sim\mathsf{N}\left(0,\sigma^2\boldsymbol{\Sigma}\right)$. Määritellään alakolmiomatriisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}(\phi)=\begin{bmatrix}\sqrt{1-\phi^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -\phi & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\phi & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -\phi & 1\end{bmatrix}\qquad(T\times T).$$

Osoita, että $\mathbf{By}\sim\mathsf{N}\left(0,\sigma^2I_T\right)$ ja edelleen, että $\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-1\prime}$. Tämä osoittaa, että monisteen s. 45 mainituksi matriisiksi $\mathbf{C}$ voidaan valita $\mathbf{C}=\mathbf{B}^{-1}$ ja että s. 48 määritelty residuaalivektori voidaan laskea kaavalla $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{B}(\hat{\phi})\mathbf{y}$.

Vihje: Vektorin $\mathbf{By}$ ensimmäistä komponenttia tarkasteltaessa kannattaa käyttää y_1:n MA(∞)-esitystä.

3. Tarkastellaan autoregressiivistä kausivaihtelumallia $y_t=\phi_s y_{t-s}+\varepsilon_t,\ \varepsilon_t\sim\mathsf{iid}\left(0,\sigma^2\right)$, jossa $|\phi_s|<1$ ja $s\geq1$. Johda y_t:n MA(∞)-esitys sekä autokovarianssifunktio ja autokorrelaatiofunktio.

4. Tarkastellaan stationaarista SARMA(0,1)×(0,1)$_{12}$-mallia $y_t=\theta(B)\,\Theta\left(B^{12}\right)\varepsilon_t$, $\varepsilon_t\sim\mathsf{nid}\left(0,\sigma^2\right)$, jossa $\theta(B)=1+\theta_1B$ ja $\Theta\left(B^{12}\right)=1+\Theta_1B^{12}$. Asetetaan $\theta^*(B)=\theta(B)\,\Theta\left(B^{12}\right)$. Esitä polynomin $\theta^*(B)=1+\theta_1^*B+\cdots+\theta_{13}^*B^{13}$ kertoimet parametrien θ_1 ja Θ_1 funktiona ja kuvaa miten havaittuun aikasarjaan $\mathbf{y}=(y_1,...,y_T)$ liittyvä parametrien θ_1 ja Θ_1 log-uskottavuusfunktio ja logaritmoitu profiiliuskottavuusfunktio muodostetaan.

Vihje: Ks. monisteen s. 26 ja s. 44-45.