Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 7, viikko 5

1. Jatkoa tehtäville 6.3 ja 6.4. Perustele tehtävän 6.4 avulla monisteen s. 40 mainittu tulos, jonka mukaan parametrin $\boldsymbol{\phi}$ PNS-estimaattori poikkeaa SU-estimaattorista vain siinä, että havainnot $y_1, ..., y_p$ tulkitaan ei-satunnaisiksi vakioiksi eli $\boldsymbol{\phi}$:n PNS-estimaattori perustuu ns. ehdolliseen uskottavuusfunktioon, jossa on ehdollistettu p:n ensimmäisen havainnon $y_1, ..., y_p$ suhteen.

Huom.: Tehtävän tuloksen avulla nähdään myös, että mainittu ehdollinen uskottavuusfunktio saadaan silloin, kun taustalla oleva AR(p)-prosessi $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \sigma^2\right)$, määritellään ajankohdille $t = p+1, p+2, ...$ ja p ensimmäistä havaintoa $y_1, ..., y_p$ toimivat (havaittuina) alkuarvoina, joiden jakauman ei tarvitse olla sama kuin tehtävässä 6.4 oletetussa stationaarisessa tilanteessa. Esimerkiksi, alkuarvot $y_1, ..., y_p$ voivat olla ei-satunnaisia vakioita. Tällaisissa tilanteissa y_t ei ole stationaarinen, joskin "stationarisoituu" t:n kasvaessa rajatta. Tätä havainnollistaa monisteen s. 16 olevaan AR(1)-prosessiin liittyvät laskelmat, jossa y_t:n odotusarvo ja varianssi riippuvat yleensä t:stä, mutta lähestyvät stationaarisen tapauksen arvoja, kun $|\phi| < 1$ (huomaa painovirhe varianssissa - oikea tulos on $\mathsf{Var}\left(y_t\right) = \phi^{2t}\mathsf{Var}\left(y_0\right) + \sigma^2 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^{2j}$).

2. Tarkastellaan regressiomallia $y_t = \boldsymbol{z}_t' \boldsymbol{\varphi} + u_t$, $t = 1, ..., T$, jossa $\boldsymbol{z}_t$ $(m \times 1)$ on ei-satunnaisten selittävien muuttujien vektori, $\boldsymbol{\varphi}$ $(m \times 1)$ on vastaava tuntematon kerroinvektori ja normaalinen ARMA(p,q)-prosessi $u_t = \phi_1 u_{t-1} + \cdots + \phi_p u_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \sigma^2\right)$, toteuttaa stationaarisuus-, käännettävyys- ja identifioituvuusehdon. Malli voidaan esittää matriisimerkinnöin

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{u},$$

jossa $\boldsymbol{y} = [y_1 \ \cdots \ y_T]'$, $\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{z}_1 : \cdots : \boldsymbol{z}_T]'$ $(T \times m)$ ja $\boldsymbol{u} = [u_1 \ \cdots \ u_T]'$. Matriisin $\boldsymbol{Z}$ asteen oletetaan olevan m. Yleistä monisteen s. 44-45 esitetty tarkastelu tähän tilanteeseen ja esitä (a) satunnaisvektorin $\mathbf{y}$ yhteistiheysfunktio, (b) parametrin $\left(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right)$ log-uskottavuusfunktio ja (c) profiiliuskottavuusfunktio. Konkreettisina esimerkkeinä vektorista $\boldsymbol{z}_t$ voidaan mainita $\boldsymbol{z}_t' = 1$ ja $\boldsymbol{z}_t' = [1 \ \ t]$.

Vihje: Satunnaisvektorin $\boldsymbol{u}$ jakauma on sama kuin monisteen s. 44 esitetty satunnaisvektorin $\boldsymbol{y}$ jakauma, joten koska $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\varphi}$ on ei-satunnaisten, niin ...

3. Tarkastellaan ARMA(1,1)-mallia $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \sigma^2\right)$, ja oletetaan, että parametrit estimoidaan tapauksessa, jossa havainnot tuottanut prosessi y_t on autokorreloimaton eli pätee $\phi = \theta = 0$. Olkoon $\mathbf{x} = \left(y_1^+, y_1^*\right)$, jossa y_1^+ ja y_1^* saadaan AR-prosesseista $y_t^+ = \phi_1 y_{t-1}^+ + \varepsilon_t$ ja $y_t^* = -\theta_1 y_{t-1}^* \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \sigma^2\right)$ (ks. monisteen s. 46). Osoita, että kovarianssimatriisi $\mathsf{Cov}\left(\mathbf{x}\right)$ on tällöin singulaarinen, joten parametrin $\boldsymbol{\beta} = (\phi, \theta)$ SU-estimaattorin asymptoottisen jakauman kovarianssimatriisi $\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\beta}\right)^{-1}$ (ks. monisteen tulos (4.5), s. 46) ei ole määritelty. Tehtävä havainnollistaa ARMA-mallin identifiointiehdon tarpeellisuutta tilastollisen päättelyn kannalta. Vastaava tulos pätee yleisesti ARMA(p,q)-malleilla.

Huom.: Monisteen tuloksessa (4.5) olevaa matriisia $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta})$ ei voida määritellä profiiliuskottavuusfunktion avulla esitetyllä tavalla eli yhtälöllä $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) = \mathsf{E}(-\partial^2 l_{\mathsf{p}}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}')$. Määritelmä on syytä korjata muotoon $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) = \mathsf{E}(-\partial^2 l(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}')$ eli käyttää alkuperäistä uskottavuusfunktiota profiiliuskottavuusfunktion asemesta. Monisteen s. 46 mainittu tulos $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) = T\sigma^{-2}\mathsf{Cov}(\mathbf{x})$ pätee tästä muutoksesta huolimatta ja tehtävästä nähdään se yleisestikin paikkansa pitävä seikka, että $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta})$ ei riipu parametrista σ^2 (riippuvuus σ^2:sta supistuu odotusarvon ottamisen myötä). AR(1)- ja MA(1)-tapauksissa tämä on vielä helpompi todeta, sillä esimerkiksi edellisessä $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\phi}) = T\sigma^{-2}\boldsymbol{\Gamma}_1$, jossa (nyt skalaari) $\boldsymbol{\Gamma}_1 = \mathsf{Var}(y_t) = \sigma^2/\left(1-\phi_1^2\right)$ (ks. monisteen s. 14). Monisteen s. 46 puolivälissä esitetty matriisin $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta})$ empiirinen vastine on määriteltävä vastaavalla tavalla. Koska matriisi $-\partial^2 l(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'$ riippuu parametrista σ^2 (tämä nähdään derivoimalla yhtälössä (4.4)), määritellään $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta})$:n empiirinen vastine kaavalla $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\sigma}^2) = -\partial^2 l(\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\sigma}^2)/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'$.

4. Tarkastellaan AR(p)-mallia $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0,\sigma^2\right)$, jossa $p \geq 2$. Esitä monisteen tulokseen (4.5) perustuen Waldin testi hypoteesille $\phi_{p-1} = \phi_p = 0$.

Vihje: Tilastollisen päättelyn moniste, s. 73-74.