Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 6, viikko 4

1. Muodosta monisteen tulokseen (4.2) (s. 39) perustuva 95%:n likimääräinen luottamusväli AR(p)-mallin kerroinvektorin $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_1, ..., \phi_p\right)$ komponentille ϕ_i $(i = 1, ..., p)$.

Tehtävissä 3 ja 4 oletetaan stationaarinen ja normaalinen AR(p)-prosessi $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \sigma^2\right)$. Koska normaalisuus periytyy myös lineaarisen prosessin määritelmässä esiintyvän tyyppisissä ääretönulotteisissa lineaarisissa muunnoksissa (ks. monisteen yhtälö (2.3), s. 12), on ε_t:n normaalisuus yhtäpitävää prosessin $\{y_t\}$ normaalisuuden kanssa. Tehtävässä 2 perustellaan yleinen tulos, jota voidaan käyttää tehtävissä 3 ja 4.

2. Osoita, että jos $Y = X + Z$, jossa $X \perp\!\!\!\perp Z$ ja $Z \sim \mathsf{N}(\mu, \Sigma)$, niin $Y | (X = x) \sim \mathsf{N}(\mu + x, \Sigma)$.

Vihje: Voit olettaa, että tarvittavat jakaumat ovat jatkuvia. Tarkastele lineaarista muunnosta $(Z, X) \to (Y, X)$ ja johda (Y, X):n yhteistiheysfunktio käyttäen tunnettua satunnaisvektoreiden muunnosten jakaumatulosta. Tämän jälkeen saat kysytyn ehdollisen jakauman tiheysfunktion käyttäen tavanomaista kaavaa ja riippumattomuutta $X \perp\!\!\!\perp Z$.

3. Oletetaan, että AR(1)-prosessista $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \sigma^2\right)$, on saatu aikasarja $y_1, ..., y_T$, joka seuraavassa tulkitaan satunnaiseksi. Määritellään satunnaisvektori $\mathbf{Y}_t = (y_1, ..., y_t)$, jolloin siis $\mathbf{Y}_T$ vastaa havaittua aikasarjaa. Osoita, että $\mathbf{Y}_T$:n yhteistiheysfunktio on

$$f_{\mathbf{Y}_T}\left(\boldsymbol{y}_T\right) = \prod_{t=2}^{T} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left\{-\left(y_t - \phi_1 y_{t-1}\right)^2 / 2\sigma^2\right\} \cdot f_{y_1}\left(y_1\right),$$

jossa $f_{y_1}\left(y_1\right)$ on y_1:n tiheysfunktio. Selvitä lisäksi $f_{y_1}\left(y_1\right)$:n lauseke.

Vihje: Totea ensin, että satunnaisvektorin $\mathbf{Y}_T$ yhteistiheysfunktio on (ehdollisen tiheysfunktion määritelmän nojalla) $f_{\mathbf{Y}_T} = f_{y_T|\mathbf{Y}_{T-1}} f_{\mathbf{Y}_{T-1}}$, jossa $f_{y_T|\mathbf{Y}_{T-1}}$ on y_T:n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $\mathbf{Y}_{T-1}$ ja argumentit on jätetty yksinkertaisuuden vuoksi merkitsemättä. Sovella tämän jälkeen samaa tulosta tiheysfunktioon $f_{\mathbf{Y}_{T-1}}$ ja etene iteratiivisesti käyden läpi kaikki $\mathbf{Y}_T$:n komponentit. Päättele tämän jälkeen tehtävän 2 avulla, että y_t:n ehdollinen jakauma ehdolla $\mathbf{Y}_{t-1}$ on $\mathsf{N}\left(\phi_1 y_{t-1}, \sigma^2\right)$.

4. Ratkaise edellinen tehtävä yleisessä AR(p)-tapauksessa käyttäen samaa periaatetta sopivasti modifioituna.

Vihje: Modifiointi merkitsee mm., että $f_{y_1}\left(y_1\right)$:n paikalle tulee $f_{\mathbf{Y}_p}(\boldsymbol{y}_p)$. Tässä tapauksessa $f_{\mathbf{Y}_p}(\boldsymbol{y}_p)$:n lausekkeen esittäminen parametrien $\phi_1, ..., \phi_p$ ja σ^2 funktiona on hankalampaa kuin tapauksessa $p = 1$ ja voit sivuuttaa sen.