Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 5, viikko 50

1. Tarkastellaan MA(1)-prosessia $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$. Monisteen s. 10 on todettu, että y_t:n ensimmäinen autokorrelaatiokerroin on $\rho_1 = \theta/\left(1+\theta^2\right)$. Osoita, että rajoittamalla θ:n arvot joukkoon $|\theta| \le 1$ voidaan parametri θ lausua yksikäsitteisesti autokorrelaatiokertoimen ρ_1 funktiona (vrt. HT 1.4). Esitä tämän perusteella momenttiestimaattori parametrille θ.

Huom.: Toisin kuin Yule-Walker -estimaattori AR-prosessin tapauksessa ei momenttiestimaattori ole (asymptoottisesti) tehokas MA-prosessin tapauksessa.

2. Tarkastellaan satunnaisvektoria $\mathbf{Z} = (Y, \mathbf{X})$, jossa Y on reaalinen ja $\mathbf{X}$ on $n \times 1$ vektori. Ositetaan $\mathbf{Z}$:n odotusarvo ja kovarianssimatriisi vastaavasti

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mu_Y \\ \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_{Y\mathbf{X}} \\ \sigma_{\mathbf{X}Y} & \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X} \end{bmatrix}.$$

Oletetaan $\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X}$ positiivisesti definiitiksi ja määritellään $U = Y - \mu_Y - \sigma_{Y\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})$, jolloin $Y = \mu_Y + \sigma_{Y\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}) + U$. Osoita seuraavat tulokset:

(a) $\mathsf{E}(U) = 0$ ja $\mathsf{Var}(U) = \sigma_Y^2 - \sigma_{Y\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X}^{-1}\sigma_{\mathbf{X}Y}$

(b) U ja $\mathbf{X}$ ovat korreloimattomia eli $\mathsf{Cov}(U, \mathbf{X}) = 0$

Vihje: Tehtävä voidaan ratkaista suoraan laskemalla käyttäen satunnaisvektorien odotusarvoa ja kovarianssimatriiseja koskevia tuloksia. Huomaa, että $\sigma_{Y\mathbf{X}} = \sigma'_{\mathbf{X}Y}$ ja muista, että esim. $\mathsf{Cov}(U, \mathbf{X}) = \mathsf{E}\left[(U - \mathsf{E}(U))(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})'\right]$.

3. Jatkoa edelliselle. Osoita, että millä tahansa ei-satunnaisella skalaarilla b ja $n \times 1$ vektorilla $\mathbf{c}$ pätee

$$\mathsf{E}\left(U^2\right) \le \mathsf{E}\left[\left(Y - b - \mathbf{c}'\mathbf{X}\right)^2\right].$$

Vihje: Muokkaa ensin lauseketta $Y - b - \mathbf{c}'\mathbf{X}$ lisäämällä ja vähentämällä sopivasti termejä, jotta saat lausuttua sen muodossa $Y - b - \mathbf{c}'\mathbf{X} = U + a + \left(\sigma_{Y\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{c}'\right)(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})$, jossa skalaari a on ei-satunnainen. Suorita tämän jälkeen potenssiin korotus ja laske odotusarvo käyttäen edellisen tehtävän tuloksia.

Huom.: Tuloksen tulkinta on, että keskineliövirheen mielessä paras Y:n satunnaisvektoriin $\mathbf{X}$ perustuva *lineaarinen* ennuste on $\mu_Y + \sigma_{Y\mathbf{X}}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{X})$. Jos $\mathbf{Z}$ on multinormaalinen, on ennuste Y:n ehdollinen odotusarvo ehdolla $\mathbf{X}$ eli ennuste on paras kaikkien ennusteiden joukossa. Jos y_t on stationaarinen ARMA(p,q)-prosessi odotusarvona nolla, niin valitsemalla $Y = y_{T+h}$ ja $\mathbf{X} = (y_T, ..., y_1)$ pätee $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{Z} = \mathbf{0}$, $\sigma_{Y\mathbf{X}} = \left(\gamma_h, \gamma_{h+1}, ..., \gamma_{h+T-1}\right)$ ja $\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X} = \left[\gamma_{i-j}\right]_{i,j=1,...,T}$, jossa kovarianssit voidaan laskea ARMA(p,q)-prosessin parametrien avulla kuten monisteen s. 31 on esitetty. Tällöin edellä todetusta nähdään, miten ARMA(p,q)-prosessin optimaalinen lineaarinen ennuste muodostetaan, kun ennustamisessa käytetään prosessin äärellistä menneisyyttä (vrt. monisteen keskustelu s. 33). Laskelmien helpottamiseksi on (mahdollisesti suuren) käänteismatriisin $\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{X}^{-1}$ muodostamiseksi kehitetty useita algoritmeja.

4. Tarkastellaan ns. ARIMA(1,1,0)-prosessia $\Delta y_t = \phi \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ...,$ $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right), |\phi| < 1$. (Tämä on erikoistapaus monisteen jaksossa 3.5 esitettävästä ARIMA(p,d,q)-prosessista). Merkitään $\mathsf{E}_t(\cdot) = \mathsf{E}(\cdot \,|y_t, ..., y_0)$ $(t \geq 1, h \geq 1)$. Osoita seuraavat tulokset:

(a) $\mathsf{E}_t(y_{t+h}) - \mathsf{E}_t(y_{t+h-1}) = \phi^h \Delta y_t$

(b) $\mathsf{E}_t(y_{t+h}) = y_t + \dfrac{\phi\left(1 - \phi^h\right)}{(1 - \phi)} \Delta y_t$

Vihje: Menettele (a)-kohdassa kuten stationaarisen AR(1)-prosessin tapauksessa monisteen s. 33. (b)-kohdassa yksi mahdollisuus on ratkaista (a)-kohdassa saatu differenssiyhtälö.