Stationaariset aikasarjat sl 2010 - kl 2011, HT 3, viikko 47

1. Tarkastellaan satunnaiskulkua $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, ...$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$ ja (yksinkertaisuuden vuoksi) $y_0 = 0$ (ks. monisteen s. 16). Totea, että

$$\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (T - t + 1)\, \varepsilon_t$$

ja osoita tämän avulla tulokset $\mathsf{E}(\bar{y}) = 0$ ja $\mathsf{Var}(\bar{y}) \to \infty$, kun $T \to \infty$. Päättele tästä edelleen, että otoskeskiarvo $\bar{y}$ ei estimoi havaintojen odotusarvoa ($= 0$) tarkentuvasti. (Viimeisessä kohdassa ei tarvitse esittää tarkkaa matemaattista todistusta.)

Huom.: Tämä tehtävä osoittaa, että tavanomainen suurten lukujen laki ei päde satunnaiskulun tapauksessa, mikä on yksi syy sille, että satunnaiskulun kaltaiset epästationaariset prosessit vaativat oman teoriansa (vrt. otoskeskiarvon tarkentuvuus jakson 2.4 stationaarisessa tapauksessa).

2. Tarkastellaan AR(1)-prosessista $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$, $|\phi| < 1$, saatua aikasarjaa $y_1, ..., y_T$. Millaiseksi monisteen s. 20 esitetty otoskeskiarvon $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t$ asymptoottinen jakauma sievenee tässä tapauksessa?

Vihje: AR(1)-prosessin autokovarianssifunktio monisteen s. 14. (Mainittu asymptoottinen tulos voidaan todistaa tehdyillä oletuksilla.)

3. Oletetaan, että edellisessä tehtävässä $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 1$, $T = 100$ ja $\bar{y} = 0.3$.
(a) Muodosta likimääräinen 95%:n luottamusväli odotusarvolle $\mu = \mathsf{E}(y_t)$ käyttäen edellä mainittuja parametriarvoja. Tukeeko aineisto väitettä $\mu = 0$?
(b) Oletetaan nyt havainnot virheellisesti riippumattomiksi eli toimitaan olettaen ikään kuin $y_t \sim \mathsf{iid}(0, 1.56)$ pätisi (tässä 1.56 saadaan y_t:n oikeasta varianssin kaavasta $\mathsf{Var}(y_t) = \sigma^2 / \left(1 - \phi^2\right)$ oletetuilla parametrien ϕ ja σ^2 arvoilla). Muodosta likimääräinen 95%:n luottamusväli odotusarvolle μ käyttäen tätä virheellistä oletusta ja vertaa tulosta edellisen kohdan oikeaan tulokseen. Mitä havaitset?

Vihje: Luottamusväli muodostetaan käyttäen samaa periaatetta kuin tilastollisen päättelyn kurssin normaalimallia koskevassa esimerkissä (ks. Nieminen & Saikkonen: "Tilastollisen päättelyn kurssi", esimerkki 6.1.3).

4. Tarkastellaan monisteen Kuvion 1.5 oikeassa alakulmassa esitettyä Australian tavaroiden ja palvelusten neljännesvuosittaisen tuonnin logaritmisia differenssejä, jotka näyttävät stationaarisilta. Alla on alkuperäisestä ja neliöidystä sarjasta lasketut 10 ensimmäistä autokorrelaatiokerrointa (edelliset $\mathsf{r}_y(h)$ ja jälkimmäiset $\mathsf{r}_{y^2}(h)$).

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathsf{r}_y(h)$	−0.10	−0.05	−0.09	0.07	−0.23	−0.11	−0.09	0.08	−0.09	0.12
$\mathsf{r}_{y^2}(h)$	0.28	−0.04	−0.06	−0.02	−0.02	0.01	−0.06	−0.04	−0.01	0.08

Tutki voidaanko havaittu sarja tulkita vahvasta valkoisesta kohinasta (tai iid-prosessista) saaduksi realisaatioksi. Havaintojen lukumäärä $T = 125$.