Topologia I, malliratk. 9

1. (a) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$

on tas. jatk. $\mathbb{R}$:ssä:

$\|\varphi(t) - \varphi(s)\|^2 = (\cos t - \cos s)^2 + (\sin t - \sin s)^2$

$= \cos^2 t - 2\cos t \cos s + \cos^2 s + \sin^2 t - 2\sin t \sin s + \sin^2 s$

$= 2 - 2(\cos t \cos s + \sin t \sin s) = 2(1 - \cos(t-s))$

olk. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ s.e. $|1 - \cos r| < \frac{\varepsilon^2}{2}$ $\forall |r| < \delta$

nyt $|t - s| < \delta \Rightarrow |1 - \cos(t-s)| < \frac{\varepsilon^2}{2}$

$\Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\| < \sqrt{2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$

siis φ on tas. jatk. $\mathbb{R}$:ssä

(b) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$

ei ole tas. jatk. $\mathbb{R}$:ssä:

olk. $\delta > 0$, val. $t \in \mathbb{R}$ s.e.

$(t + \delta/2)^2 = t^2 + \pi \iff t = \frac{\pi}{\delta} - \frac{\delta}{4}$

nyt $\varphi(t + \delta/2) = (\cos(t + \delta/2)^2, \sin(t+\delta/2)^2)$

$= (\cos(t^2 + \pi), \sin(t^2 + \pi))$

$= (-\cos t^2, -\sin t^2)$

$= -\varphi(t)$

siis $\|\varphi(t) - \varphi(t + \delta/2)\| = 2\|\varphi(t)\| = 2$,

vaikka $|t - (t + \delta/2)| = \delta/2 < \delta$

φ ei siis ole tas. jatk. $\mathbb{R}$:ssä

2. $(x_n)_{n=1}^\infty$ jono X:ssä, $A_n = \{x_j : j \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$

$(x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchy $\iff d(A_n) \to 0$, kun $n \to \infty$

<u>tod.</u>

"$\Rightarrow$" ol. $(x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchy, $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $d(x_j, x_k) < \varepsilon/2 \ \forall j, k \geq n_0$

nyt $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_j, x_k) < \varepsilon/2 \ \forall j, k \geq n$

$\Rightarrow d(A_n) = \sup\{d(x_j, x_k) : j, k \geq n\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$

siis $d(A_n) \to 0$

"$\Leftarrow$" ol. $d(A_n) \to 0$, $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $d(A_{n_0}) < \varepsilon$

nyt $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \sup\{d(x_j, x_k) : j, k \geq n_0\}$

$= d(A_{n_0}) < \varepsilon$

siis $(x_n)_{n=1}^\infty$ on Cauchy $\square$

3. (a) ol. X täydellinen, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ suljettuja epätyhjiä X:n osajoukkoja, joilla $d(A_n) \to 0$

os. $\exists! \, x \in X$ s.e. $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{x\}$

<u>tod.</u>

$A_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ voidaan val. $x_n \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{x_j : j \geq n\} \subset A_n$, sillä $A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$

$\Rightarrow d(\{x_j : j \geq n\}) \leq d(A_n) \to 0$

$\Rightarrow (x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchy $\overset{X \text{ täyd.}}{\Rightarrow} \exists x \in X$ s.e. $x_n \to x$

$\forall n \in \mathbb{N}$ pätee:

$x_j \in A_n$, kun $j \geq n$ $\Rightarrow$ $x \in \bar{A}_n = A_n$ ← A_n suljl.

siis $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

jos olisi $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $y \neq x$, niin

$d(A_n) \geq d(x,y) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lightning$

siis $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ $\square$

(b) $A_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ A_n suljl. ja epätyhjä $\forall n \in \mathbb{N}$

ja $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

jos olisi $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, niin $\|x\| \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lightning$

siis $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

4. (a) $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ suljettuja välejä $\Rightarrow$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$

<u>tod.</u>

merk. $I_k = [a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$

$I_k \supset I_{k+1}$ $\Rightarrow$ $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$

siis $a_k \leq a_l \leq b_l \leq b_k$ $\forall l \geq k$

merk. $x = \sup\{a_l : l \in \mathbb{N}\}$ (täydellisyysaksiooma!)

$\Rightarrow$ $a_k \leq x \leq b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ $\square$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatk., $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ s.e. $f(x) = 0$

<u>tod.</u>

Muodostetaan laskeva jono suljettuja välejä $I_1 \supset I_2 \supset \dots$:

Nyt $f(\frac{a+b}{2}) \geq 0$ tai $f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$.

Siis ainakin toisella väleistä $[a, \frac{a+b}{2}]$ ja $[\frac{a+b}{2}, b]$ f saa sekä ei-neg. että ei-pos. arvoja.

Valitaan tuo väli I_1:ksi.

Valitaan vastaavasti I_2:ksi se I_1:n puolisko, jolla f saa sekä ei-neg. että ei-pos. arvoja. Jatketaan näin ja saadaan $I_1 \supset I_2 \supset \dots$.

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x_k, y_k \in I_k : f(x_k) \leq 0 \leq f(y_k)$

ja $\exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$

koska $|x_k - x| \leq 2^{-k}(b-a)$ ja $|y_k - x| \leq 2^{-k}(b-a)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, niin

$x_k \to x$ ja $y_k \to x$.

Koska f on jatkuva, niin

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \lim_{k\to\infty} \underbrace{f(x_k)}_{\leq 0} \leq 0 \\ f(x) &= \lim_{k\to\infty} \underbrace{f(y_k)}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = 0$$

$\square$

(c). $f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{Q}$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ jatk.

$f(0) = -2 < 0$, $f(2) = 4 - 2 = 2 > 0$

$x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

siis $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

- $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, x > \sqrt{2} \\ -1, & x \in \mathbb{Q}, x < \sqrt{2} \end{cases}$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ jatk.

5. os. $c_0 = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ sulj. ℓ^∞:ssä:

olk. $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty \setminus c_0$ ts. jollakin $\varepsilon > 0$ pätee:

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n$ s.e. $|x_k| \geq \varepsilon$

olk. $\|(x_n)_{n=1}^\infty - (y_n)_{n=1}^\infty\|_\infty < \varepsilon/2$ ja $n \in \mathbb{N}$

nyt $\exists k \geq n$ s.e. $|x_k| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow |y_k| \geq \underbrace{|x_k|}_{\geq \varepsilon} - \underbrace{|x_k - y_k|}_{< \varepsilon/2} > \varepsilon/2$

siis $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n$ s.e. $|y_k| > \varepsilon/2$

ts. $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty \setminus c_0$

täten $(x_n)_{n=1}^\infty$-keskinen $\varepsilon/2$-säteinen avoin kuula $\subset \ell^\infty \setminus c_0$ eli $\ell^\infty \setminus c_0$ on avoin $\square$