Topologia I, harj. 8 malliratkaisut

1. (a) ei välttämättä:

olk. $X = \mathbb{R}$ ja $x_n = \log n$, $n \in \mathbb{N}$

nyt $|x_{n+1} - x_n| = \log \frac{n+1}{n} = \log(1 + \frac{1}{n}) \to 0$, kun $n \to \infty$,

eli ehto toteutuu, mutta

$x_n = \log n \to \infty$, eli $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole Cauchy

(b) ol. (X, d) täydellinen, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono X:ssä

ja $d(x_n, x_{n+1}) \leq 10 \cdot 2^{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

os. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy:

$1 \leq n < m$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m)$$
$$\leq 10 \cdot (2^{-n} + 2^{-n-1} + \ldots + 2^{-m+1})$$
$$\leq \frac{10 \cdot 2^{-n}}{1 - 1/2} = 20 \cdot 2^{-n} \to 0, \quad n \to \infty$$

siis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy

koska (X, d) täydellinen, niin

$\exists a \in X$ s.e. $x_n \to a$

os. $d(x_5, a) < 1$:

koska $x_n \to a$, niin $\exists n_0 \geq 6$ s.e.

$d(x_{n_0}, a) < 1/4$

nyt

$$d(x_5, a) \leq d(x_5, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, a) \leq 20 \cdot 2^{-5} + 1/4 < 1$$

2. (a) os. $d(x_n, a) \le \dfrac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

olk. $n \in \mathbb{N}$ ja $\varepsilon > 0$

koska $x_n \to a$, niin $\exists m \ge n$ s.e.

$d(x_m, a) < \varepsilon$

nyt

$$d(x_n, a) \le d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, a)$$

$$\le \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) + \varepsilon$$

koska pätee $\forall \varepsilon > 0$, niin ollava

$$d(x_n, a) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{7}$, $x \in [0,1]$

$f'(x) = \frac{3}{7} x^2$, $x \in]0,1[$

$\Rightarrow \sup_{x \in]0,1[} |f'(x)| \le \frac{3}{7} =: q$

siis f q-Lipschitz

Koska $[0,1]$ on täydellinen, niin Banachin kiintopistelauseen mukaan $\exists a \in [0,1]$ s.e.

$f(a) = a$ ts. $a^3 - 7a + 1 = 0$

ja $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots)$ suppenee

kohti a:ta. merk. $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$

a-kohdan mukaan $d(x_n, a) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$

olk. $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = f(x_0) = 1/7$

Etsitään $n \in \mathbb{N}$ s.e. $d(x_n, a) \le 10^{-5}$:

$$\frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \le 10^{-5} \iff \left(\frac{3}{7}\right)^n \le 10^{-5} \cdot 4$$

$$\iff n \ge -\frac{\ln(10^{-5} \cdot 4)}{\ln(7/3)} \approx 11{,}95$$

$a \approx 0{,}143277$

3. $Tu(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy, \quad x \in [0,1]$

nyt tehtävän integraaliyhtälölle on ratkaisu $\iff$ operaattorille $T: C[0,1] \to C[0,1]$ on kiintopiste $u \in C[0,1]$

os. T kontraktio:

olk. $u, v \in C[0,1]$

$$\Rightarrow |Tu(x) - Tv(x)| = \left| \int_0^1 (K(x,y)u(y) - K(x,y)v(y))\,dy \right|$$

$$\le \int_0^1 |K(x,y)| \underbrace{|u(y) - v(y)|}_{\le \|u-v\|_\infty} dy \le q \|u - v\|_\infty,$$

missä $q = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,dy < 1$ siis T on kontraktio

Banachin kiintopistelauseen nojalla

$\exists u \in C[0,1]$ s.e. $Tu = u$