Topologia I, harj. 4

1. (a) $\varphi(f) = f(1/2)$, $f \in C[0,1]$

4:3

$\forall f, g \in C[0,1]$ pätee

$$|\varphi(f) - \varphi(g)| = |f(1/2) - g(1/2)| \le \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = \|f-g\|_\infty$$

siis φ on 1-Lipschitz

(b) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$, $f \in C[0,1]$

$\forall f, g \in C[0,1]$ pätee

$$|\varphi(f) - \varphi(g)| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \right| = \left| \int_0^1 (f(x)-g(x))dx \right|$$

$$\le \int_0^1 \underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\le \|f-g\|_\infty} dx \le \int_0^1 \|f-g\|_\infty dx = \|f-g\|_\infty$$

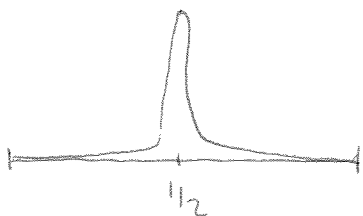
siis φ on 1-Lipschitz

2. ei ole jatkuva: $f(1/2)$ voi olla mv suuri, normin $\|f\|_1$ ollessa mv pieni

ts.

$\exists f_n \in C[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ s.e. $f_n(1/2) \to \infty$, $\|f_n\|_1 \to 0$, kun $n \to \infty$

tällöin φ ei voi olla jatkuva 0:ssa



Tarkemmin:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2 - 1/2^n \\ 2^n n x - n(2^{n-1} - 1), & 1/2 - 1/2^n \le x \le 1/2 \\ -2^n n x + n(2^{n-1}+1), & 1/2 \le x \le 1/2 + 1/2^n \\ 0, & 1/2^n \le x \le 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f_n \in C[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ja $f_n(1/2) = n$, $\|f_n\|_1 = \frac{n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall \delta > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{n}{2^n} < \delta$, jolloin

$|\varphi(f_n) - \varphi(0)| = n \ge 1$, vaikka $\|f_n - 0\|_1 = \frac{n}{2^n} < \delta$

3. 4:5 $f: X \to Y$ M-Lipschitz, $g: Y \to Z$ M'-Lipschitz

$\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ MM'-Lipschitz

<u>tod.</u>

$\forall x, y \in X$ pätee

$$d''((g\circ f)(x), (g \circ f)(y)) = d''(g(f(x)), g(f(y)))$$

$$\underset{g \text{ M'-Lips.}}{\leq} M' d'(f(x), f(y)) \underset{f \text{ M-Lips.}}{\leq} M'M d(x,y) \quad \square$$

4. 4:6 Jokainen $f: X \to Y$ jatkuva jokaisessa X:n erakkopisteessä.

<u>tod.</u>

olk. a X:n erakkopiste

$\Rightarrow \exists$ avoin ymp. U s.e. $U = \{a\}$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(a, \delta) \subset U = \{a\}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : fB(a,\delta) = f\{a\} = \{f(a)\} \subset B(f(a), \varepsilon)$

siis f jatk. a:ssa $\square$

5. (a) f ei jatkuva:

olk. $a \in \mathbb{R}$

nyt $B_{d'}(f(a), 1) = \{f(a)\} = \{a^2\}$ ja

$\forall \delta > 0 : B_d(a, \delta) =]a-\delta, a+\delta[$ joten

$[a^2, (a+\delta)^2[\subset f B_d(a,\delta)$, mutta

$[a^2, (a+\delta)^2[\not\subset \{a^2\} = B_{d'}(f(a), 1)$

(b) f on jatkuva:

jokainen lähtöjoukon piste on erakkopiste, ks. teht. 4

6. $f: [-10, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 + 6x + 7$, M-Lipschitz ?

<u>ratk.</u>

$\ulcorner$ VAL: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jatk., diff. $]a,b[$:llä

$\Rightarrow \exists x \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(x)(b-a) \lrcorner$

nyt $f'(x) = 10x + 6$, joten $|f'(x)| \leq 94 =: M \quad \forall x \in]-10, 5[$

$x, y \in [-10, 5], y < x \overset{VAL}{\Rightarrow} \exists x_0 \in]y, x[: f(x) - f(y) = f'(x_0)(x-y)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f'(x_0)|}_{\leq M} |x - y| \quad \square$