Topologia I, mallirartk. 10

1. $A, B \subset X$ kompakteja $\Rightarrow A \cup B$ kompakti:
olk. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono $A \cup B$:ssä (jos $A = B = \emptyset$, niin asia selvä)
toinen joukoista A ja B sisältää jonon jäseniä
äärettömän monella indeksillä n
merk. tuota joukkoa C:llä
voidaan val. $n_1 < n_2 < \cdots$ s.e. $x_{n_k} \in C \ \forall k \in \mathbb{N}$
Koska C on kompakti, on jonolla $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$
C:ssä suppeneva osajono.
Siis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:llä on $A \cup B$:ssä suppeneva
osajono.

2. $A_1 = \{(x,y) : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$ sulj., sillä
$A_1 = f^{-1}]-\infty, 4]$, missä $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 3y^2$
on jatkuva ja $]-\infty, 4]$ sulj. $\mathbb{R}$:ssä
A_1 on raj., sillä
$(x,y) \in A_1 \Rightarrow x^2 + 3y^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow \|(x,y)\| \leq 2$
eli $A_1 \subset B((0,0), 2)$
siis A_1 on kompakti ja siten myös täydellinen

$A_2 = \{(x,y) : xy = 1\}$ sulj., sillä
$A_2 = g^{-1}\{1\}$, missä $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy$
on jatkuva ja $\{1\}$ sulj. $\mathbb{R}$:ssä
A_2 ei ole raj., sillä $(r, 1/r) \in A_2 \ \forall r \neq 0$
siis A_2 on täydellinen, mutta ei kompakti

$A_3 = \{(x,y) : x^2 + 3y^2 < 4\}$ ei ole sulj., sillä

$(2 - 1/n, 0) \in A_3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $(2 - 1/n, 0) \to (2, 0)$,
kun $n \to \infty$

mutta $(2,0) \notin A_3$

3. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono X:ssä, $d(x_n, x_k) \geq r > 0 \quad \forall n \neq k$

$\Rightarrow \forall$ osajonolla $(x_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ pätee $d(x_{n_m}, x_{n_j}) \geq r$
$\forall m \neq j$

siis $(x_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ ei ole Cauchy, eikä
siten suppene

Siis X ei ole kompakti.

4. olk. x_n välin $A_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}]$, $n \geq 1$ keskipiste

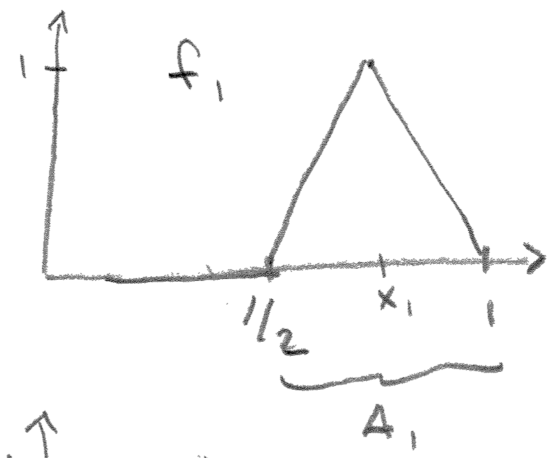
määr. funktiot $f_n \in C[0,1]$ asettamalla

$f_n(x) = 0$, kun $x \notin A_n$

$f_n(x_n) = 1$

f_n affiini väleillä

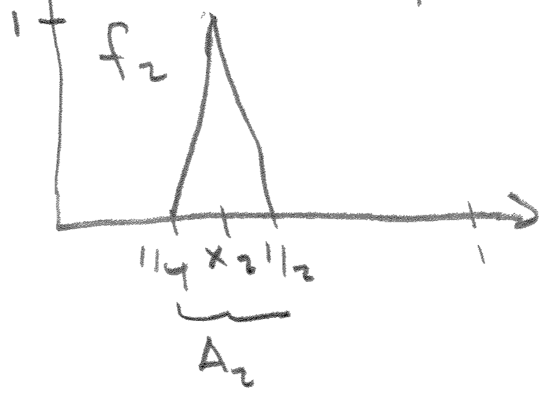
$[2^{-n}, x_n]$, $[x_n, 2^{-n+1}]$



nyt

$n \neq k \Rightarrow f_n(x_n) - f_k(x_n) = 1$

$\Rightarrow \|f_n - f_k\|_\infty = 1$



3. tehtävän nojalla
A ei ole kompakti

5. ol. X diskreetti
os. X kompakti $\Leftrightarrow$ X äärellinen:

"$\Leftarrow$" Jos X äärellinen, niin jokaisella jonolla on osajonona vakiojono, joka tietysti suppenee. Siis X on kompakti.

"$\Rightarrow$" Jos X on ääretön, niin $\exists$ jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ X:ssä s.e. $x_n \neq x_k$ $\forall n \neq k$. Koska jono suppenee diskreetissä metriikassa vain jos se on vakio jostakin indeksistä lähtien ja jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole osajonona vakiojonoa, niin jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole suppenevaa osajonoa. Siis X ei ole kompakti jos se on ääretön.

6. (a) ol. X kompakti
os. X täydellinen:
olk. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono X:ssä
X kompakti $\Rightarrow$ $\exists$ suppeneva osajono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$
Cauchyn jono suppenee jos sen osajono suppenee ja siten $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee.
Siis X on täydellinen.

(b) ol. X metr. av. jonka jokainen suljettu rajoitettu osajoukko on kompakti
os. X täydellinen:
olk. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono X:ssä
$\Rightarrow$ $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ raj. $\Rightarrow$ $\bar{A}$ sulj. ja raj.
joten kompakti $\Rightarrow$ $\exists a \in \bar{A}$ s.e. $x_n \to a$
Siis X täydellinen.

7. olk. $A = \{(t,h,v) \in \mathbb{R}^3 : t,h,v \geq 0,\ t+h+v = 168\}$

ja $f : A \to \mathbb{R}$, $f(t,h,v) = \exp(t^2h^3v + t) + \pi t h^2 v -$

Nyt A on sulj. sillä $A = g^{-1}\{168\}$, missä

$g : A \to \mathbb{R}$, $g(t,h,v) = t+h+v$ jatk.

ja A raj. sillä $A \subset [0,168]^3$.

Siis A kompakti.

Koska f on jatk., niin se saavuttaa suurimman arvonsa jollekin $(t,h,v) \in A$