Topologija I, karj. 1

1. $A_i \subset X,\ i \in J$

- os. $X \setminus \bigcup_{i \in J} A_i = \bigcap_{i \in J} (X \setminus A_i)$:

$x \in X \setminus \bigcup_{i \in J} A_i \iff x \in X$ in $x \notin \bigcup_{i \in J} A_i \iff x \in X$ in $\forall i \in J : x \notin A_i$

$\iff \forall i \in J : x \in X \setminus A_i \iff x \in \bigcap_{i \in J} (X \setminus A_i)$

- os. $X \setminus \bigcap_{i \in J} A_i = \bigcup_{i \in J} (X \setminus A_i)$:

$x \in X \setminus \bigcap_{i \in J} A_i \iff x \in X$ in $x \notin \bigcap_{i \in J} A_i \iff x \in X$ in $\exists i \in J : x \notin A_i$

$\iff \exists i \in J : x \in X \setminus A_i \iff x \in \bigcup_{i \in J} (X \setminus A_i)$

2. $f : X \to Y,\ B_i \subset Y,\ i \in J$

- os. $f^{-1} \bigcup_{i \in J} B_i = \bigcup_{i \in J} f^{-1} B_i$:

$x \in f^{-1} \bigcup_{i \in J} B_i \iff f(x) \in \bigcup_{i \in J} B_i \iff \exists i \in J : f(x) \in B_i$

$\iff \exists i \in J : x \in f^{-1} B_i \iff x \in \bigcup_{i \in J} f^{-1} B_i$

- os. $f^{-1} \bigcap_{i \in J} B_i = \bigcap_{i \in J} f^{-1} B_i$:

$x \in f^{-1} \bigcap_{i \in J} B_i \iff f(x) \in \bigcap_{i \in J} B_i \iff \forall i \in J : f(x) \in B_i$

$\iff \forall i \in J : x \in f^{-1} B_i \iff x \in \bigcap_{i \in J} f^{-1} B_i$

- os. $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1} B,\ B \subset Y$:

$x \in f^{-1}[Y \setminus B] \iff f(x) \in Y \setminus B \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1} B \iff x \in X \setminus f^{-1} B$

3. $f: X \to Y$, $A_j \subset X$, $j \in J$

- os. $f \bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j \in J} fA_j$:

"$\subset$" $x \in \bigcup_{j\in J} A_j \Rightarrow \exists j \in J : x \in A_j \Rightarrow \exists j \in J : f(x) \in fA_j \Rightarrow f(x) \in \bigcup_{j\in J} fA_j$

siis $f \bigcup_{j\in J} A_j \subset \bigcup_{j\in J} fA_j$

"$\supset$" $y \in \bigcup_{j\in J} fA_j \Rightarrow \exists j \in J : y \in fA_j \Rightarrow \exists j \in J \; \exists x \in A_j : f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x \in \bigcup_{j\in J} A_j : f(x) = y \Rightarrow y \in f \bigcup_{j\in J} A_j$

- os. $f \bigcap_{j\in J} A_j \subset \bigcap_{j\in J} fA_j$:

$x \in \bigcap_{j\in J} A_j \Rightarrow \forall j \in J : x \in A_j \Rightarrow \forall j \in J : f(x) \in fA_j \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{j\in J} fA_j$

siis $f \bigcap_{j\in J} A_j \subset \bigcap_{j\in J} fA_j$

- voi olla $f \bigcap_{j\in J} A_j \neq \bigcap_{j\in J} fA_j$:

• $X = \{1,2\}$, $Y = \{1\}$, $f(1) = f(2) = 1$ (ainoa funktio)

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\} \Rightarrow f[\underbrace{A_1 \cap A_2}_{=\emptyset}] = \emptyset$, mutta

$fA_1 \cap fA_2 = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$

• $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,2\}$, $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = 2$

$A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\} \Rightarrow f[A_1 \cap A_2] = f\{1\} = \{1\}$, mutta

$fA_1 \cap fA_2 = \{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\} \neq \{1\}$

4. $f: X \to Y$, $A \subset X$, $Y \subset B$

- os. $A \subset f^{-1}fA$:

  $x \in A \Rightarrow f(x) \in fA \Rightarrow x \in f^{-1}fA$

- os. $ff^{-1}B \subset B$:

  $x \in f^{-1}B \Rightarrow f(x) \in B$, siis $ff^{-1}B \subset B$

- os. $f^{-1}fA \subset A$, kun f inj.:

  $x \in f^{-1}fA \Rightarrow f(x) \in fA \Rightarrow \exists x' \in A : f(x') = f(x) \overset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} x = x' \in A$

- os. $B \subset ff^{-1}B$, kun f surj.:

  $y \in B \overset{f \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists x \in X : f(x) = y \overset{x \in f^{-1}B}{\Rightarrow} y \in ff^{-1}B$

5. $x \cdot y = x_1 y_2 + x_2 y_1$, ei sisätulo $\mathbb{R}^2$:ssa:

   $(1,0)\cdot(1,0) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$, vaikka $(1,0) \neq (0,0)$

6. E sisätuloav., $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E : x \cdot y = 0 \ \forall y \in A\}$ on E:n lin.aliav.

   <u>tod.</u>

   (1) $x, x' \in A^\perp \Rightarrow (x + x')\cdot y = \overbrace{x \cdot y}^{=0} + \overbrace{x' \cdot y}^{=0} = 0 \quad \forall y \in A \Rightarrow x + x' \in A^\perp$

   (2) $a \in \mathbb{R}, x \in A^\perp \Rightarrow (ax)\cdot y = a\underbrace{(x \cdot y)}_{=0} = 0 \quad \forall y \in A \Rightarrow ax \in A^\perp$

   (3) $0 \cdot y = 0 \quad \forall y \in A \Rightarrow 0 \in A^\perp$ $\square$