Topologia I, korvaava kurssikoe, mallirat.

1. (a) ks. kirja

(b) $g(x) = x$, $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$

$g(1/2) = 1/2$, $f(1/2) = 1/4$

$\Rightarrow \|f - g\| \geq |f(1/2) - g(1/2)| = 1/4$

$\Rightarrow f \notin B(g, 1/4)$ eli $r = 1/4$ kelpaa

2. (a) Metrisen avaruuden osajoukko U on avoin, jos $\forall x \in U\ \exists r > 0$ s.e. $B(x,r) \subset U$

os. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$ avoin $\mathbb{R}^2$:ssa:

$(x,y) \in U \Rightarrow r = y + 1 > 0$

nyt $B((x,y), r) \subset A$:

ol. $(u,v) \in B((x,y), r)$, jos olisi $v \leq -1$, niin

$d((x,y),(u,v)) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \geq |y - v|$

$= |r - 1 - v| \underset{v \leq -1}{\geq} r \quad \Rightarrow (u,v) \notin B((x,y), r)$ ↯

siis $v > -1$ ja $(u,v) \in A$

(b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ ei ole avoin:

olk. $(x,y,z) \in A$, jolloin $z = 0$

$r > 0 \Rightarrow (x, y, r/2) \in B((x,y,z), r)$, sillä

$d((x,y,r/2), (x,y,z)) = \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2 + (r/2 - 0)^2}$

$= r/2 < r$, mutta

$(x, y, r/2) \notin A$, sillä $r/2 \neq 0$

3. (a) ks. kirja

(b) $a \in [0,1]$, $\delta_a(f) = f(a)$, $f \in C[0,1]$

os. $\delta_a : C[0,1] \to \mathbb{R}$ 1-Lipschitz:

$\forall f, g \in C[0,1]$ on voimassa

$|\delta_a(f) - \delta_a(g)| = |f(a) - g(a)|$

$\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|$

siis δ_a on Lipschitz-kuvauksena

jatkuva

4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (t^2 - 1, \cos(2t), \sin(e^t))$

φ on jatkuva, sillä komponenttikuvaukset

$\varphi_1(t) = t^2 - 1$, $\varphi_2(t) = \cos(2t)$, $\varphi_3(t) = \sin(e^t)$

ovat jatkuvia:

merk. $u(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$, jolloin $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva

$\Rightarrow \varphi_1 = u^2 - 1$, $\varphi_2 = \cos \circ (2u)$, $\varphi_3 = \sin \circ \exp$

ovat jatkuvia

Lisäksi $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Siis

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \|\varphi(t)\|$, on jatkuvien

kuvausten yhdisteenä jatkuva.

Nyt

$\{t \in \mathbb{R} : \|\varphi(t)\| > 2\} = f^{-1}]2, \infty[$ on

avoin avoimen joukon $]2, \infty[$ alkukuvana

jatkuvassa kuvauksessa.