Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Kurssikoe 1
12.11.2010

1. (a) Osoita, että yhtälö
$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
määrittelee normin jatkuvien funktioiden $[0,1] \to \mathbb{R}$ avaruudessa $C[0,1]$. Voit pitää tunnettuna, että suljetulla välillä jatkuva reaalifunktio on rajoitettu, jolloin $\|f\|$ on hyvin määritelty kaikilla $f \in C[0,1]$.
(b) Varustetaan avaruus $C[0,1]$ metriikalla $d(f,g) = \|f-g\|$. Anna sellainen $r > 0$, että $f \notin B_d(g,r)$, missä funktiot $f, g \in C[0,1]$ on määritelty kaavoilla $g(x) = x$ ja $f(x) = x^2$.

2. (a) Määrittele, mitä tarkoitetaan metrisen avaruuden avoimella joukolla ja osoita määritelmään nojautuen, että joukko $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$ on avoin tasossa $\mathbb{R}^2$ tavallisen metriikan suhteen.
(b) Onko joukko $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ avoin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tavallisen metriikan suhteen? Perustele!

3. (a) Osoita, että jokainen Lipschitz-kuvaus on jatkuva.
(b) Olkoon $C[0,1]$ varustettu sup-normin määräämällä metriikalla kuten tehtävässä 1 ja olkoon $a \in [0,1]$. Osoita, että yhtälön $\delta_a(f) = f(a)$ määrittelemä kuvaus $\delta_a : C[0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

4. Olkoon kuvaus $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ määritelty kaavalla
$$\alpha(t) = (t^2 - 1, \cos(2t), \sin(e^t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Osoita, että joukko $\{t \in \mathbb{R} : \|\alpha(t)\| > 2\}$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}$ tavallisen metriikan suhteen. Tässä $\|\cdot\|$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ euklidinen normi.