Topologia I, 2. kurssikoe, malliratkaisut

1. (a) $f: X \to Y$ jatk. pist. $a \in X$

os. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$:

olk. $\varepsilon > 0$

f jatk. a:ssa $\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.e. $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$
$\forall d(x,a) < \delta$

$x_n \to a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $d(x_n, a) < \delta \ \forall n \geq n_0$

nyt $\forall n \geq n_0$ pätee $d(x_n, a) < \delta$ ja siten

$d'(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$

siis $f(x_n) \to f(a)$ $\square$

(b) $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & , x > 0 \\ b & , x = 0 \end{cases}$

ei ole olemassa lukua $b \in \mathbb{R}$ s.e. f jatk. 0:ssa:

$x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$, $y_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$

mutta $\forall n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

$f(y_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$

eli $f(x_n) \to 1$, $f(y_n) \to -1$

2. (a) $\varphi_n(t) = (\cos(t + 1/n), \sin(t + 1/n))$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

os. $\varphi_n \to \varphi$ tas. $\mathbb{R}$:ssä, missä

$\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$:

olk. $\varepsilon > 0$

cos ja sin tas. jatk. $\mathbb{R}$:ssä, joten

$\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ s.e. $|\cos s - \cos t| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \ \forall |s-t| < \delta_1$,
$|\sin s - \sin t| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \ \forall |s-t| < \delta_2$

koska $1/n \to 0$, niin $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$1/n < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} \quad \forall n \geq n_0$

siis $\forall n \geq n_0$ on voimassa $|(t+1/n)-t| < \delta$ joten

$$\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\|^2 = |\cos(t+1/n) - \cos t|^2$$
$$+ |\sin(t+1/n) - \sin t|^2$$
$$< \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

siis $\varphi_n \to \varphi$ tas. $\mathbb{R}$issä $\square$

(b) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$

os. $f_n \to f$ pist. $[0,1]$:ssä, mutta ei tas.

missä $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$:

nyt

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f_n(x) = x^n \to 0, \quad n \to \infty$

ja $f_n(1) = 1^n = 1 \to 1, \quad n \to \infty$

siis $f_n \to f$ pist. $[0,1]$:ssä

kuitenkin $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

sillä $\sup_{x \in [0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1$

siis suppeneminen ei ole tasaista

Voidaan myös todeta, että f ei ole jatkuva, vaikka jokainen f_n on, jolloin suppeneminen ei voi olla tasaista.

(Jos jono jatkuvia funktioita suppenee tasaisesti, niin raja-funktio on jatkuva.)

3. (a) Ei ole olemassa jatkuvaa surjektiota $[0,1]\times[0,1] \to]0,1[\times]0,1[$, sillä $[0,1]\times[0,1]$ on $\mathbb{R}^2$:in suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti ja $]0,1[\times]0,1[$ ei ole kompakti.

Kompaktin avaruuden kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.

(b) $X =]0,\infty[$, $Y=\mathbb{R}$, $f: X\to Y$, $f(x) = 1/x$ on jatkuva kuvaus täydelliseen avaruuteen $Y=\mathbb{R}$. Nyt $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono X:ssä, mutta $f(x_n)=n$ eli $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ ei suppene Y:ssä.

4. $Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$, $f\in C[0,1]$, $x\in[0,1]$

(a) $[0,1]\times[0,1]$ kompakti, $K: [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ jatk. $\Rightarrow$ K tas. jatk. $[0,1]\times[0,1]$:ssä

olk. $\varepsilon > 0$ ja $f\in C[0,1]$

nyt $\exists\delta>0$ s.e. $|K(x,y) - K(x',y')| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty + 1}$

$\forall d((x,y),(x',y')) < \delta$

siis $\forall |x-x'| < \delta$, $x,x'\in[0,1]$ pätee

$d((x,y),(x',y)) = |x-x'| < \delta \quad \forall y\in[0,1]$

$|K(x,y) - K(x',y)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty+1} \quad \forall y\in[0,1]$

siis

$$|Tf(x) - Tf(x')| = \left| \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy - \int_0^1 K(x',y) f(y)\,dy \right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y) - K(x',y)|}_{< \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty + 1}} \underbrace{|f(y)|}_{\leq \|f\|_\infty} dy$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty + 1} \|f\|_\infty < \varepsilon$$

täten Tf on tas. jatk. $[0,1]$:ssä ja siten jatk.

(b) $T : C[0,1] \to C[0,1]$, $f \mapsto Tf$ Lipschitz:

olk. $f, g \in C[0,1]$

nyt $\forall x \in [0,1]$ on voimassa

$$|Tf(x) - Tg(x)| = \left| \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy - \int_0^1 K(x,y) g(y)\,dy \right|$$

$$\leq \int_0^1 |K(x,y)| \underbrace{|f(y) - g(y)|}_{\leq \|f-g\|_\infty} dy \leq \left(\int_0^1 |K(x,y)|\,dy \right) \|f-g\|_\infty$$

$\leq M \|f-g\|_\infty$, missä

$$M = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,dy \leq \max_{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]} |K(x,y)| < \infty$$

K jatk. kompaktilla joukolla, joten $|K|$ saavuttaa maksimin

siis $$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \underbrace{|Tf(x) - Tg(x)|}_{\leq M \|f-g\|_\infty} \leq M \|f-g\|_\infty$$

ja T on Lipschitz-kuvauksena jatkuva $\square$

(c) b-kohdan nojalla

$$\|Tf - Tg\|_\infty \leq q \|f-g\|_\infty \quad \forall f,g \in C[0,1],$$

missä $q = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,dy < 1$ eli

T on kontraktio $C[0,1]$:llä

$C[0,1]$ on täydellinen, joten Banachin kiintopistelauseen nojalla on olemassa $f \in C[0,1]$ s.e. $Tf = f$ $\square$