Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Kurssikoe 2
14.12.2010

Tehtävissä esiintyvät reaalisuoran ja tason osajoukot on varustettu avaruuksien $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ tavallisten metriikoiden indusoimilla metriikoilla.

1. (a) Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon kuvaus $f : X \to Y$ jatkuva pisteessä $a \in X$. Osoita, että jono $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä $f(a)$ avaruudessa Y aina, kun jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti a:ta avaruudessa X.
(b) Olkoon funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla
$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0, \\ b, & x = 0. \end{cases}$$
Voidaanko luku $b \in \mathbb{R}$ valita siten, että f on jatkuva pisteessä 0?

2. (a) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kuvaus $\alpha_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ asettamalla
$$\alpha_n(t) = (\cos(t + 1/n), \sin(t + 1/n)), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Osoita, että jono $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti jotain kuvausta tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$.
(b) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ asettamalla
$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1].$$
Osoita, että jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti jotain funktiota pisteittäin joukossa $[0, 1]$. Onko suppeneminen tasaista joukossa $[0, 1]$? Perustele!

3. (a) Onko olemassa jatkuvaa surjektiota joukolta $[0, 1] \times [0, 1]$ joukolle $]0, 1[\times]0, 1[$? Perustele!
(b) Anna esimerkki jatkuvasta kuvauksesta f metriseltä avaruudelta X täydelliselle metriselle avaruudelle Y ja avaruuden X Cauchyn jonosta $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, joilla jono $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ ei suppene Y:ssä.

4. Olkoon $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Määritellään jokaisella $f \in C[0, 1]$ funktio $Tf : [0, 1] \to \mathbb{R}$ asettamalla
$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in [0, 1].$$
(a) Osoita, että $Tf : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva.
(b) Osoita, että kuvaus $T : C[0, 1] \to C[0, 1], f \mapsto Tf$ on jatkuva, kun avaruus $C[0, 1]$ on varustettu sup-normin määräämällä metriikalla.
(c) Oletetaan lisäksi, että
$$\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x, y)|\,\mathrm{d}y < 1.$$
Osoita, että on olemassa sellainen $f \in C[0, 1]$, että $Tf = f$.