

1. (a) Osoita, että yhtälö

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

määrittelee normin avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Olkoon  $E$  normiavaruus ja  $E \neq \{0\}$ . Määrittele  $E$ :ssä metriikka, jossa  $E$  on rajaton.

2. (a) Määrittele, mitä tarkoitetaan metrisen avaruuden  $(X, d)$  avoimella joukolla ja osoita määritelmään nojautuen, että kuula  $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$  on avoin joukko kaikilla  $a \in X$ ,  $r > 0$ .

(b) Onko joukko  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq |x|\}$  avoin tasossa  $\mathbb{R}^2$  tavallisen metriikan suhteen? Perustelee!

3. Olkoot  $X$  ja  $Y$  metrisiä avaruuksia.

(a) Määrittele, mitä tarkoitetaan kuvauksen  $f : X \rightarrow Y$  jatkuvuudella pisteessä  $a \in X$ .

(b) Oletetaan, että  $X$  on diskreetti. Osoita, että jokainen kuvaus  $f : X \rightarrow Y$  on jatkuva jokaisessa  $X$ :n pisteessä.

(c) Osoita, että yhtälön

$$f(x, y) = (x + y, xy, y + 2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

määrittelemä kuvaus  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on jatkuva tavallisten metriikoiden suhteen.

4. Olkoon  $(X, d)$  metrisen avaruuden avaruus ja olkoot  $A, B \subset X$  epätyhjiä osajoukkoja. Osoita, että joukko  $\{x \in X : d(x, A) = d(x, B)\}$  on suljettu.