Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Harjoitus 9
29.11.2010

Tehtävästä 4 saa kaksi pistettä.

1. Onko polku $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tasaisesti jatkuva, kun
   (a) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$,
   (b) $\alpha(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$, $t \in \mathbb{R}$?

2. 12:1 Todista Lause 12.2: Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono X:ssä. Merkitään $A_n = \{x_j : j \geq n\}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy, jos ja vain jos $d(A_n) \to 0$, kun $n \to \infty$.

3. 12:7 (a) Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono epätyhjiä suljettuja X:n osajoukkoja, joiden läpimitat $d(A_n)$ suppenevat kohti nollaa. Osoita, että joukkojen A_n leikkauksessa on täsmälleen yksi piste.
   Neuvo. Aloita valitsemalla pisteet $x_n \in A_n$.
   (b) Anna esimerkki tason osajoukoista $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, jossa jokainen A_n on suljettu ja epätyhjä, mutta joukkojen A_n leikkaus on tyhjä. Miksei a-kohdan tulosta voi nyt soveltaa?

4. (a) Reaalilukujen täydellisyysaksiooman mukaan jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla reaalilukujen osajoukolla on pienin yläraja. Todista täydellisyysaksioomaan nojaten: Jos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ ovat suljettuja reaalilukuvälejä, niin tällöin $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$.
   Neuvo. Merkitse $I_k = [a_k, b_k]$ ja valitse $x = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Osoita, että $x \in I_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Oletetaan, että joillakin $a, b \in \mathbb{R}$ on $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$. Osoita, että $f(x) = 0$ jollakin $x \in \mathbb{R}$.
   Neuvo. Ainakin toisella väleistä $[a, (a+b)/2]$ ja $[(a+b)/2, b]$ funktio f saa sekä ei-positiivisia että ei-negatiivisia arvoja. Merkitse tuota väliä I_1:llä. Jaa vastaavalla tavalla I_1 puoliksi ja valitse I_2:ksi puoliskoista se, jolla f saa sekä ei-positiivisia että ei-negatiivisia arvoja. Jatkamalla näin saat joukot $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, joiden leikkaus on a-kohdan nojalla epätyhjä ja joista löytyy sellaiset pisteet $x_k, y_k \in I_k$, että $f(x_k) \leq 0 \leq f(y_k)$. Osoita, että leikkauksesta löytyvällä luvulla x pätee $x_k \to x$ ja $y_k \to x$, mistä f:n jatkuvuuden nojalla seuraa, että $f(x) = 0$.
   (c) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, jolla $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$ joillakin $a, b \in \mathbb{Q}$, mutta jolla $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$.

5. Rajoitettujen reaalilukujonojen avaruus ℓ^{∞} on luennoilla esitetyn lauseen (kirjan tehtävä 12:5) nojalla täydellinen sup-normin

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

suhteen. Osoita, että nollaan suppenevien jonojen aliavaruus

$$c_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

on suljettu ℓ^{∞}:ssä ja siten täydellinen.
Neuvo. Osoita, että $\ell^{\infty} \setminus c_0$ on avoin. Huomaa, että $(x_n)_{n=1}^{\infty} \notin c_0$ täsmälleen silloin, kun seuraava ehto toteutuu jollakin $\varepsilon > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq n \quad \text{siten, että} \quad |x_k| \geq \varepsilon.$$

Jos tällöin $\|(x_n)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} < \varepsilon/2$, niin on oltava $(y_n)_{n=1}^{\infty} \notin c_0$, eli $(x_n)_{n=1}^{\infty}$-keskinen $\varepsilon/2$-säteinen avoin kuula sisältyy joukkoon $\ell^{\infty} \setminus c_0$.