Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Harjoitus 8
22.11.2010

Tehtävistä 1 ja 2 saa molemmista 3 pistettä. Tehtävä 3 ratkaistaan harjoituksissa esitetyn esimerkin jälkeen.

1. (a) Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono metrisessä avaruudessa (X,d). Riittääkö ehto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon \quad \text{aina, kun } n \geq n_0$$

takaamaan, että $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono?
Vihje: Tarkastele reaalilukujonoa $x_n = \log n$.
(b) 12:4 Olkoon (X,d) täydellinen metrinen avaruus ja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sellainen jono X:ssä, että $d(x_n, x_{n+1}) \leq 10 \cdot 2^{-n}$ kaikilla n. Osoita, että jono suppenee kohti jotakin pistettä $a \in X$. Osoita, että $d(x_5, a) < 1$.

2. (a) 12:12 Osoita, että Banachin kiintopistelauseen 12.8 todistuksen merkinnöin on voimassa

$$d(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1).$$

(b) 12:13 Hae yhtälön $x^3 - 7x + 1 = 0$ juuren likiarvo välillä $[0,1]$ soveltamalla Banachin kiintopistelausetta funktioon $f(x) = (x^3+1)/7$. Muista osoittaa, että f toteuttaa lauseen oletukset. Määritä laskimella ainakin 5 desimaalia. Käytä tarkkuusarvioinnissa a-kohtaa.

3. Olkoot $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Oletetaan, että

$$\sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,y)| \, \mathrm{d}y < 1.$$

Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$u(x) - \int_0^1 K(x,y) u(y) \, \mathrm{d}y = f(x), \quad x \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen jatkuva ratkaisu $u : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Vihje: Määrittele jokaisella $u \in C[0,1]$ funktio $Tu : [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$Tu(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,y) u(y) \, \mathrm{d}y, \quad x \in [0,1].$$

Voidaan pitää tunnettuna, että Tu on jatkuva, ts. $Tu \in C[0,1]$. Osoita, että (lineaarinen) kuvaus $T : C[0,1] \to C[0,1], u \mapsto Tu$ on kontraktio ja käytä Banachin kiintopistelausetta.