

1. Todista Lause 11.12.: Oletamme, että $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat jonoja X :ssä ja että $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$. Tällöin $d(x_n, y_n) \rightarrow d(a, b)$.
Neuvo. Tarkastele lauseketta $|d(x_n, y_n) - d(a, b)|$. ”Lisää ja vähennä” sopivasti.
2. Todista Lause 11.13.: Oletamme, että E on normiavaruus, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat jonoja E :ssä ja että $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Tällöin $x_n + y_n \rightarrow x + y$. Jos lisäksi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on reaalilukujono ja $a_n \rightarrow a$, niin $a_n x_n \rightarrow ax$.
Neuvo. Tarkastele lausekkeita $\|x_n + y_n - (x + y)\|$ ja $\|a_n x_n - ax\|$. ”Lisää ja vähennä” jälkimmäisessä sopivasti.
3. 11:4 Olkoon X diskreetti metrinen avaruus. Millä ehdolla sen jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee?
4. Tutki, suppenevatko seuraavat \mathbb{R}^3 :n jonot $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Myönteisessä tapauksessa määritä jonon raja-arvo.
 - (a) $x_n = (n^{-1}, e^{-n}, (-1)^n)$,
 - (b) $x_n = (n^{-1}, e^{-n}, n)$,
 - (c) $x_n = (\sin(1 + n^{-1}), \arctan n, n^{-10})$.
5. Olkoon $a \in X$ ja olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruuden X pistejono, jonka jokaisella osajonolla on osajono, joka suppenee kohti a :ta. Osoita, että $x_n \rightarrow a$.
Neuvo. Aloita tekemällä vastaoletus.
6. 11:10 Olkoon $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ \mathbb{R} :ssä (a) pisteittäin, (b) tasaisesti. Tutki samat asiat myös, kun \mathbb{R} :ssä on $\{0, 1\}$ -metriikka.