Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Harjoitus 5
11.10.2010

1. 5:2 Osoita, että joukko $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 < xyz < \sin(1 + y)\}$ on avoin $\mathbb{R}^3$:ssa.

2. 5:3 Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Osoita, että yhtälön $h(x, y) = (f(x), g(y))$ määrittelemä kuvaus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on jatkuva. Tätä kuvausta merkitään usein $h = f \times g$.

3. 5:4 Olkoon E sisätuloavaruus ja $a \in E$. Osoita, että yhtälön $f(x) = x \cdot a$ määrittelemä kuvaus $f : E \to \mathbb{R}$ on Lipschitz ja siis jatkuva.

4. 5:7 Olkoon E normiavaruus, $I = [0, 1]$ ja $f, g : I \to E$ jatkuvia. Osoita, että yhtälön
$$h(s, t) = (1 - t)f(s) + tg(s)$$
määrittelemä kuvaus $h : I^2 \to E$ on jatkuva, missä I^2 on neliö $I \times I \subset \mathbb{R}^2$.

5. 5:8 Olkoot $f, g : X \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita. Osoita, että $f \vee g$ ja $f \wedge g$ ovat jatkuvia funktioita $X \to \mathbb{R}$. Tässä $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ja $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

6. 2:16 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $x_0 \in X$, $a \in X$. Määritellään funktio $f_a : X \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0)$.
(a) Osoita, että f_a on rajoitettu.
(b) Kohdan (a) nojalla saadaan kuvaus $\varphi : X \to E = \mathrm{raj}(X, \mathbb{R})$, jossa $\varphi(a) = f_a$. Osoita, että $\|\varphi(a) - \varphi(b)\| \leq d(a, b)$, kun E:ssä on sup-normi.
(c) Osoita, että itse asiassa $\|\varphi(a) - \varphi(b)\| = d(a, b)$ laskemalla funktion $\varphi(a) - \varphi(b)$ arvo a:ssa tai b:ssä.