Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Harjoitus 4
4.10.2010

1. 4:3 Olkoon $E = C[0,1]$ varustettuna sup-normilla. Osoita, että $\alpha : E \to \mathbb{R}$ on Lipschitz ja siis jatkuva, kun (a) $\alpha(f) = f(1/2)$, (b) $\alpha(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Onko edellisen tehtävän a-kohdan kuvaus α jatkuva, kun $E = C[0,1]$ varustetaan normin
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
määräämällä metriikalla? Heuristinen perustelu riittää.

3. 4:5 Olkoon $f : X \to Y$ M-Lipschitz ja $g : Y \to Z$ M'-Lipschitz. Osoita, että kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on MM'-Lipschitz.

4. 4:6 Osoita, että jokainen kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva jokaisessa X:n erakkopisteessä.

5. 4:9 Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x^2$. Onko f jatkuva, kun
(a) lähdössä on tavallinen metriikka ja maalissa $\{0,1\}$-metriikka,
(b) metriikat ovat päinvastoin kuin a-kohdassa.

6. 4:11 Olkoon $f : [-10,5] \to \mathbb{R}$ funktio $f(x) = 5x^2 + 6x + 7$. Määritä väliarvolauseen avulla jokin sellainen M, että f on M-Lipschitz.