Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Harjoitus 10
8.12.2010

1. 13:2 Todista, että avaruuden X kahden kompaktin osajoukon yhdiste on kompakti.

2. 13:3 Tutki seuraavista joukoista $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{R}^2$, ovatko ne (a) kompakteja, (b) täydellisiä:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) : x^2 + 3y^2 \leq 4\}, \\ A_2 &= \{(x,y) : xy = 1\}, \\ A_3 &= \{(x,y) : x^2 + 3y^2 < 4\}. \end{aligned}$$

3. 13:9 Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $r > 0$, ja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sellainen X:n jono, että $d(x_n, x_k) \geq r$ kaikilla $n \neq k$. Osoita, että X ei ole kompakti.

4. 13:11 Olkoon $C[0,1]$ varustettu sup-normilla ja olkoon $A = \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ sen suljettu yksikkökuula. Konstruoi A:n jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, jolla $\|f_n - f_k\|_\infty = 1$ kaikilla $n \neq k$. Päättele edellisen tehtävän avulla, että A ei ole kompakti. Totea, että A on kuitenkin täydellisen normiavaruuden suljettu ja rajoitettu osajoukko.

5. 13:12 Osoita, että diskreetti avaruus on kompakti, jos ja vain jos se on äärellinen.

6. (a) Osoita, että kompakti metrinen avaruus on aina täydellinen.
(b) Olkoon X metrinen avaruus, jonka jokainen suljettu rajoitettu osajoukko on kompakti. Osoita, että X on täydellinen.

7. Bonustehtävä: On huomattu, että Topologia I -kurssin opiskelusta saatu pitkän aikavälin taloudellinen hyöty $r \in [0, \infty)$ (euroa) määräytyy kaavan

$$r = \exp(t^2 h^3 v + t) + \pi t h^2 v - 1$$

mukaisesti, missä t kuvaa teorian opiskeluun käytettyä aikaa (tunneissa), h harjoitustehtäviin käytettyä aikaa (tunneissa) ja v tenttiin valmistautumiseen käytettyä aikaa (tunneissa). Osoita, että 12 viikkoa kestävästä, 14 tuntia viikottaista opiskelua sisältävästä kurssista saatava hyöty r on mahdollista maksimoida valitsemalla muuttujien $t, h, v \in [0, \infty)$ arvot sopivasti. Totea, että uurastus ei ole missään tapauksessa mennyt hukkaan!