Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Opettajalinjan työpaja II: Topologia I
Harjoitus 1
13.9.2010

1. Todista **De Morganin lait**: Olkoon X joukko ja $A_j \subset X$ kaikilla $j \in J$. Tällöin

$$X \setminus \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j) \quad \text{ja} \quad X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j).$$

2. Olkoon $f : X \to Y$ ja $B_j \subset Y$ kaikilla $j \in J$. Todista, että tällöin

$$f^{-1} \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} f^{-1} B_j \quad \text{ja} \quad f^{-1} \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} f^{-1} B_j$$

   Olkoon $B \subset Y$. Näytä, että

$$f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1} B.$$

3. Olkoon $f : X \to Y$ ja $A_j \subset X$ kaikilla $j \in J$. Todista, että tällöin

$$f \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} f A_j \quad \text{ja} \quad f \bigcap_{j \in J} A_j \subset \bigcap_{j \in J} f A_j.$$

   Osoita esimerkillä, että jälkimmäisen kohdan joukkojen ei tarvitse olla samat.

4. Olkoon $f : X \to Y$, $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Osoita, että $A \subset f^{-1} f A$ ja että $f f^{-1} B \subset B$. Näytä lisäksi, että $A = f^{-1} f A$, mikäli f on injektio, ja että $f f^{-1} B = B$, mikäli f on surjektio.

5. 1:3 Osoita, että yhtälö $x \cdot y = x_1 y_2 + x_2 y_1$ ei määrittele sisätuloa tasossa $\mathbb{R}^2$.

6. 1:4 Olkoon E sisätuloavaruus. Joukon $A \subset E$ *ortokomplementti* on joukko

$$A^{\perp} = \{x \in E : x \cdot y = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

   Osoita, että $A^{\perp}$ on E:n vektorialiavaruus.