# Induktio, jonot ja summat

Matemaattinen induktio on erittäin hyödyllinen todistusmenetelmä, jota sovelletaan laajasti. Sitä verrataan usein dominoefektiin eli ketjureaktioon, jossa ensimmäisen dominopalikka kaataa kaatuessaan toisen, toinen kolmannen, jne. jolloin kukin jonon palikoista kaatuu lopulta. Tulemme käyttämään induktiota tällä kurssilla myöhemminkin vielä useita kertoja.

# Induktioperiaate

Matematiikassa törmätään usein väittämiin, jotka sisältävät ennalta määräämättömän lukumäärän objekteja. Tarkasteltavana voi esimerkiksi olla jono lukuja $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joiden lukumäärä $n$ on ennalta määräämätön. Jos halutaan osoittaa todeksi tällainen väite, riippumatta ko. objektien lukumäärästä, on usein käytettävä induktiota sen sijaan, että tutkittaisiin jokainen tapaus erikseen (1 objekti, 2 objektia, jne.), mikä on mahdotonta jos objektien lukumäärää ei ole rajoitettu.

**Induktioperiaate**:
Tarkastellaan väittämää, joka sisältää ennalta määräämättömän määrän objekteja. Oletetaan, että

1. väittämä pätee, kun objekteja on yksi
2. voidaan osoittaa todeksi, että jos väittämä pätee lukumäärällä $n$ objektia, se pätee myös lukumäärällä $n + 1$ objektia.

Tällöin induktioperiaatteen nojalla väittämä pätee mielivaltaisella lukumäärällä objekteja.

# Induktio - Esimerkki 1

Osoitetaan, että

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.
Tarkastetaan ensin, että kaava pätee kun $n = 1$:
Vasen puoli on tällöin (triviaalisti) $= 1$, kun taas oikea puoli

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

eli kaava pätee.

# Induktio - Esimerkki 1 jatkuu

Tehdään sitten **induktio-oletus**: Kaava pätee jollakin $n \geq 1$, ts.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktio-oletukseen nojautuen tulisi nyt todistaa **induktioväite**: Kaava pätee arvolla $n+1$, ts.

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Lähdetään liikkeelle yo. kaavan vasemmasta puolesta:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \overset{i.o.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

kuten halusimmekin. Induktioperiaatteen nojalla kaava pätee siten kaikilla $n \geq 1$.

# Lyhennysmerkintä summalle ja tulolle

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja. Niiden summasta ja tulosta käytetään seuraavia lyhennysmerkintöjä:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ja

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Juuri äskettäin todistamamme summakaava voidaan kirjoittaa tällä lyhennysmerkinnällä kun asetetaan $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$, ts. $a_k = k$, missä $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

# Induktio - Esimerkki 2

Osoitetaan induktiolla, että kaikilla $n \geq 1$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1.$$

Tapaus $n = 1$: Vasen puoli $= 2^{1-1} = 2^0 = 1$.
Oikea puoli $= 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.
Tehdään induktio-oletus: Yo. summakaava pätee <u>jollakin</u> $n \geq 1$ ja todistetaan, että tällöin pätee (induktioväite)

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} = 2^{n+1} - 1.$$

Nyt

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} = 2^n + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \overset{i.o.}{=} 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1,$$

joten induktioväite pätee. Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \geq 1$.

# Induktio - Esimerkki 3

Osoitetaan induktiolla, että kaikilla $n \geq 1$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Tapaus $n = 1$: Vasen puoli $= 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Oikea puoli $= 1^2 = 1$.
Induktio-oletus: Kaava pätee jollakin $n \geq 1$, eli

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Todista, että tällöin

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2.$$

# Yhteys aiempaan esimerkkiin

Funktioiden yhteydessä kävimme läpi esimerkin, jossa tuli etsiä bijektio joukolta $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ joukolle $B = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$. Kuvaus

$$f : A \to B, \quad f(m) = \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^2$$

osoitettiin harjoituksissa bijektioksi. Joukko $A$ koostuu parittomista luonnollisista luvuista $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \ldots$, joiden summille osoitimme juuri kaavan

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Jokaisen luonnollisen luvun $n$ neliö (eli joukon $B$ $n$:s alkio) saadaan siis laskemalla yhteen $n$ ensimmäistä paritonta lukua. Siis $f$ voidaan määritellä summana

$$f(a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k = n^2.$$

# Induktio - Esimerkki 4

Osoitetaan induktiolla, että $n(n^2+2)$ on jaollinen luvulla 3 aina, kun $n \geq 1$.
Väite pätee selvästikin, kun $n = 1$.
Tehdään induktio-oletus: $n(n^2+2)$ on jaollinen kolmella jollakin $n \geq 1$.
Osoitetaan induktioväite: Tällöin myös $(n+1)((n+1)^2+2)$ on jaollinen kolmella.
Nyt
$(n+1)((n+1)^2+2) = (n+1)(n^2+2n+3) = n^3+3n^2+5n+3$
$= n(n^2+2)+3n^2+3n+3.$
Toinen termi on selvästi kolmella jaollinen ja niin on induktio-oletuksen nojalla myös ensimmäinen termi $n(n^2+2)$. Siis induktioväite on todistettu ja induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

# Lukujonojen merkinnöistä

Merkitsemme lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muodostamaa jonoa $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_k)_{k=1}^{n}$, missä $a_k$ on jonon $k$:s termi (tai jäsen). Jono voi olla myös päättymätön, jolloin merkitään $(a_1, a_2, \ldots) = (a_k)_{k=1}^{\infty}$.
Esim.

- $a_k = k$, $(a_k)_{k=1}^{n} = (1, 2, 3, \ldots, n)$
- $a_k = k^2$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 4, 9, \ldots)$

# Huomautus

On hyvä pitää mielessä, että periaatteessa jonon ensimmäisten termien luetteleminen ei riitä yksikäsitteisesti määräämään jonossa myöhemmin tulevia termejä.
Mikä on seuraava luku jonossa $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$? Luonnollisesti miellämme, että kyseessä on jono $(k)_{k=1}^{\infty}$, jolloin seuraava luku on 6, mutta eihän näin täydy välttämättä olla!
Miksei kyseessä voisi olla vaikka jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä

$$a_k = \lfloor 0{,}123457 \cdot 10^k \rfloor - \lfloor 0{,}12345 \cdot 10^{k-1} \rfloor \cdot 10$$

(merkintä $\lfloor \cdot \rfloor$ tarkoittaa positiiviselle luvulle sen kokonaisosaa, esim. $\lfloor 11{,}3 \rfloor = 11$). Tällöin
$a_1 = \lfloor 1{,}23457 \rfloor - \lfloor 0{,}12345 \rfloor \cdot 10 = 1 - 0 \cdot 10 = 1$
$a_2 = \lfloor 12{,}3457 \rfloor - \lfloor 1{,}2345 \rfloor \cdot 10 = 12 - 1 \cdot 10 = 2$
$a_3 = \lfloor 123{,}457 \rfloor - \lfloor 12{,}345 \rfloor \cdot 10 = 123 - 12 \cdot 10 = 3$
$a_4 = \lfloor 1234{,}57 \rfloor - \lfloor 123{,}45 \rfloor \cdot 10 = 1234 - 123 \cdot 10 = 4$
$a_5 = \lfloor 12345{,}7 \rfloor - \lfloor 1234{,}5 \rfloor \cdot 10 = 12345 - 1234 \cdot 10 = 5$
$a_6 = \lfloor 123457 \rfloor - \lfloor 12345 \rfloor \cdot 10 = 123457 - 12345 \cdot 10 = 7$

# Aritmeettinen jono

**Aritmeettisessa jonossa** kahden peräkkäisen termin erotus on vakio, ts. $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on aritmeettinen, jos on olemassa sellainen $d \in \mathbb{R}$, että

$$a_{k+1} - a_k = d$$

kaikilla $k \geq 1$. Aritmeettisen jonon, jonka peräkkäisten termien erotus on $d$, $k$:s termi on siis $a_k = a_1 + (k-1)d$: (perustellaan induktiolla)
Tapaus $k = 1$ selvä. Jos $a_k = a_1 + (k-1)d$ jollakin $k \geq 1$, niin
$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$.
Esim.

- $a_k = k$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 2, 3, \ldots)$ on aritmeettinen ($d = 1$)
- $a_k = 2k - 1$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 3, 5, \ldots)$ on aritmeettinen ($d = 2$)
- $a_k = k^2$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 4, 9, \ldots)$ ei ole aritmeettinen
- $a_k = 2^{k-1}$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, 2, 4, 8, \ldots)$ ei ole aritmeettinen

# Aritmeettisen jonon summa

Aritmeettisen jonon $(a_k)_{k=1}^n$, jonka peräkkäisten termien erotus on $d$, summa saadaan kaavasta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d.$$

Todistus:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = \sum_{k=1}^{n} a_1 + \sum_{k=1}^{n} (k-1)d$$

$$= na_1 + d \sum_{k=1}^{n} (k-1) = na_1 + d \sum_{k=1}^{n-1} k = na_1 + \frac{(n-1)n}{2} d$$

Tätä kaavaa on hyvä käyttää, kun tietää peräkkäisten termien erotuksen. Summan voi kuitenkin laskea ilmankin $d$:tä, mikäli tietää jonon pituuden lisäksi ensimmäisen ja viimeisen termin:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d = n \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} = n \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

# Aritmeettisen jonon summa - Esimerkki 1

- Jonon $(2k-1)_{k=1}^{10} = (1, 3, 5, 7, \ldots, 19)$ summa on
$$n\frac{a_1 + a_n}{2} = 10 \cdot \frac{1+19}{2} = 100.$$
- Jonon $(5, 8, 11, \ldots)$ kahdenkymmenen ensimmäisen termin summa on
$$na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 20 \cdot 5 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 3 = 670.$$

# Aritmeettisen jonon summa - Esimerkki 2

Tien pituus on 50 km. Tien varteen asetetaan sähkötolppia 50 m välein. Ensimmäinen tolppa on pystytetty tien alkuun ja loput 1000 tolppaa on kasattu sen viereen, mistä kuorma-auto vie niitä paikoilleen, 20 tolppaa yhdessä kuormassa. Kuinka pitkän matkan kuorma-auto joutuu kulkemaan ennen kuin kaikki tolpat ovat paikoillaan?

# Ratkaisu

Pystyttäessään 20 tolppaa 50 metrin välein kuorma-auto kulkee kilometrin matkan. Ensimmäisellä edestakaisella matkalla auto kulkee siis kaksi kilometriä. Seuraavalla matkalla auton on ensin ajettava kilometri päästäkseen tolpattoman osuuden alkuun, pystytettävä sitten mukana olevat 20 tolppaa ja palattava lopuksi takaisin. Voidaan ajatella, että auto kulkee edestakaisin tuon kilometrin matkan ja tekee sitten ensimmäistä matkaa vastaavan matkan. Matkaa kertyy toisella kertaa siis $2 + 2 = 4$ kilometriä. Kolmas matka on vastaavalla tavalla $4 + 2 = 6$ kilometriä. Viimeisen, eli 50. matkan pituus on kaksi kertaa koko tien pituus eli 100 km. Kuljetusmatkojen pituudet muodostavat aritmeettisen jonon $(2k)_{k=1}^{50}$. Jonon termien summaksi saadaan

$$50 \cdot \frac{2 + 100}{2} = 2550.$$

Kuorma-auto joutuu siis kulkemaan 2550 km ennen kuin urakka on valmis.

# Greenin-Taon lause

Matemaatikot Ben Green ja Terence Tao todistivat vuonna 2004 vanhan konjektuurin alkulukujen aritmeettisista jonoista:

### Lause

*Alkuluvut sisältävät mielivaltaisen pitkiä aritmeettisia jonoja.*

Olipa siis $n$ mikä hyvänsä luonnollinen luku, niin löytyy $n$:n alkuluvun jono, jonka peräkkäiset termit ovat vakioetäisyydellä $d$ toisistaan. Esim.
$n = 3$: $(3, 5, 7)$, $(d = 2)$
$n = 4$: $(5, 17, 29, 41)$, $(d = 12)$
$n = 5$: $(5, 11, 17, 23, 29)$, $(d = 6)$
Onnistutko löytämään lisää samanpituisia tai pidempiä?

# Geometrinen jono

**Geometrisessa jonossa** kahden peräkkäisen termin suhde on vakio, ts. $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ on geometrinen, jos on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, että $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ kaikilla $k \geq 1$. Geometrisen jonon, jonka peräkkäisten termien suhde on $r$, $k$:s termi $a_k = a_1 r^{k-1}$. Niinpä geometrinen jono on aina muotoa $(a, ar, ar^2, \ldots)$, missä $a \neq 0$ ja $r \neq 0$
Esim.

- $a_k = (\frac{1}{2})^{k-1}$, $(a_k)_{k=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$ on geometrinen.
- $a_k = 2 \cdot 3^{k-1}$, $(a_k)_{k=1}^{4} = (2, 6, 18, 54)$ on geometrinen.

# Pankkitili

Pankkitilillä oli vuonna 2001 $a$ euroa. Joka vuodenvaihteessa tilille lisätään korko, joka on 3% tilin saldosta. Vuonna 2002 tilillä on

$$a + \frac{3}{100}a = \frac{103}{100}a \quad \text{euroa,}$$

vuonna 2003 siellä on

$$\frac{103}{100}a + \frac{3}{100}\Big(\frac{103}{100}a\Big) = \frac{103}{100}a\Big(1 + \frac{3}{100}\Big) = \Big(\frac{103}{100}\Big)^2 a \quad \text{euroa.}$$

Merkitään $s_k$:lla tilin saldoa vuonna $2000 + k$. Saamme geometrisen jonon $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$, jonka ensimmäinen termi on $a$ ja peräkkäisten termien suhde on $\frac{103}{100}$, ts.

$$s_k = \Big(\frac{103}{100}\Big)^{k-1} a$$

kaikilla $k \geq 1$ eli $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ on geometrinen.

# Geometrisen jonon summa

Geometrisen jonon $(a_k)_{k=1}^n = (a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1})$, $r \neq 1$, summa saadaan kaavasta

$$\sum_{k=1}^n a_k = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Tämä nähdään kertomalla summaa $1-r$:llä ja huomioimalla kumoutuminen:

$$(1-r)\sum_{k=1}^n a_k = (a+ar+\cdots+ar^{n-1})-(ar+ar^2+\cdots+ar^n) = a-ar^n = a(1-r^n)$$

$$\iff \sum_{k=1}^n a_k = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

# Geometrisen jonon summa - Esimerkki

- $a = 1, r = \frac{1}{2}$, $(a_k)_{k=1}^5 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)_{k=1}^5 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16})$

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{16}$$

# Akilleus ja kilpikonna

Antiikin aikaisen paradoksin mukaan Akilleus ei voi kilpajuoksussa saavuttaa kilpikonnaa, jos kilpikonnalle annetaan etumatkaa. Oletetaan vaikkapa että etumatka on 100 metriä. Akilleus juoksee 20 metriä sekunnissa ja kilpikonna ”juoksee” kaksi senttimetriä sekunnissa. Akilleus juoksee etumatkan kiinni viidessä sekunnissa, mutta tänä aikana kilpikonna on edennyt kymmenen senttimetriä. Akilleus juoksee 10 cm matkan $\frac{5}{1000}$ sekunnissa, mutta silloin kilpikonna on edennyt $\frac{1}{10}$ millimetriä. Eli alkaa näyttää siltä, että aina kun Akilleus pääsee sinne, missä kilpikonna oli, niin kilpikonna onkin jo ehtinyt kauemmaksi. Eikö Akilleus siis koskaan saavuta kilpikonnaa?

# Akilleus ja kilpikonna

Tasaisen nopeuden kaavasta "matka $=$ aika $\times$ nopeus", saamme yhtälön sille ajanhetkelle $t$, jolloin Akilleus saavuttaa kilpikonnan:

$$100 + \frac{2}{100} \cdot t = 20 \cdot t.$$

Yhtälön ratkaisu on $t = \frac{5000}{999} \approx 5,005$ eli "todellisuudessa" Akilleus saavuttaa kilpikonnan noin $5 + \frac{1}{200}$ sekunnin päästä. Paradoksin kuvailussa tuo aika pilkotaan yhä pieneneviin osiin, jolloin rupeaa näyttämään, ettei Akilleus milloinkaan saa kilpikonnaa kiinni. Tarkastellaan asiaa seuraavasti: Merkitään $a_1$:llä aikaa, joka Akilleukselta menee etumatkan kiinniottamiseen, $a_2$:lla aikaa, joka Akilleukselta menee kilpikonnan ajassa $a_1$ kulkeman matkan suorittamiseen, $a_3$:lla aikaa, joka Akilleukselta kuluu kilpikonnan ajassa $a_2$ kulkeman matkan suorittamiseen, jne.

# Akilleus ja kilpikonna

Koska kilpikonna kulkee ajassa $a$ matkan $a \cdot \frac{2}{100}$ metriä ja Akilleus juoksee tuon matkan $(a \cdot \frac{2}{100})/20 = \frac{a}{1000}$ sekunnissa, niin on voimassa

$$a_1 = 5 \quad \text{sekuntia ja} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1000} \quad \text{jokaisella } n = 1, 2, \ldots$$

Täten paradoksissa tarkastellut aikavälit muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen termi on 5 ja jossa peräkkäisten termien suhde on $\frac{1}{1000}$. Geometrisen summan kaavan nojalla on voimassa

$$a_1+a_2+\cdots+a_n = 5\cdot\frac{1-(\frac{1}{1000})^n}{1-\frac{1}{1000}} = 5\cdot\left(1-\frac{1}{1000^n}\right)\cdot\frac{1000}{999} = \frac{5000}{999}-\frac{5}{999\cdot 10^{n-1}}$$

Tästä näemme, että aika on paradoksissa pilkottu osiin, joiden yhteenlaskettu kesto ei milloinkaan ylitä $\frac{5000}{999}$ sekuntia, eli sitä aikaa, joka Akilleukselta kului kilpikonnan kiinnisaamiseen. Oikea johtopäätös ei siis ole, ettei Akilleus saavuta "koskaan" kilpikonnaa, vaan ettei Akilleus saavuta kilpikonnaa "koskaan ennen kuin $\frac{5000}{999}$ sekunnin päästä".