Eksponentti- ja logaritmifunktiot

Eksponentti- ja logaritmifunktiot liittyvät läheisesti toisiinsa. Eksponenttifunktio tulee vastaan ilmiöissä, joissa tarkasteltava suure kasvaa tai vähenee suhteessa senhetkiseen arvoonsa. Niinpä esimerkiksi eksponentiaalinen kasvaminen on hyvin nopeata. Logaritmifunktio on tietyssä mielessä eksponenttifunktion *käänteisfunktio*. Sekin kasvaa (kun kantaluku > 1), mutta erittäin hitaasti.

Potenssin määritelmä

Määritellään *kantaluvun* $a > 0$ potenssi:

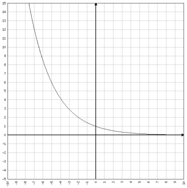
- Jos $m \in \mathbb{Z}$ on positiivinen, niin $a^m = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (m kertaa) ja $a^{-m} = 1/a^m$.
- Jos $q = \frac{m}{n}$ $(n > 0)$, niin $a^q = \sqrt[n]{a^m}$.
- Voidaan määritellä a^r kaikille reaaliluvuille r siten, että seuraavat laskusäännöt ovat voimassa kaikilla $a, b > 0$ ja $r, s \in \mathbb{R}$:

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r.$$

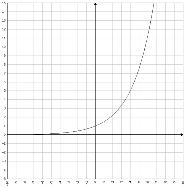
Eksponenttifunktio

Määritellään kantaluvulle $a > 0$ **eksponenttifunktio**

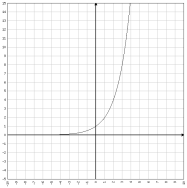
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x.$$



$a = 0,7$



$a = 1,5$



$a = 2$

Käytännön esimerkki

Valon voimakkuus vähenee 30% sen kulkiessa annetun muovilevyn läpi. Paljonko voimakkuus vähenee, jos valo kulkee kolmen samanlaisen peräkkäin asetetun levyn läpi?

Ratkaisu:

Ensimmäisen levyn läpäistyään valon voimakkuudesta on jäljellä 70%. Läpäistessää toisen levyn, voimakkuus heikkenee vielä 30%, joten voimakkuudesta on jäljellä $0,7 \cdot 0,7 = 0,49$, eli 49%. Kolmannen levyn läpäistessään valon voimakkuus heikkenee taas 30%, joten lopulta voimakkuudesta on jäljellä $0,49 \cdot 0,7 = 0,343$, eli $34,3$%.

Jos asia ilmaistaan eksponenttifunktion avulla ja merkitään $f(n)$:llä valon voimakkuuden osuutta alkuperäisestä voimakkuudesta valon läpäistyä n identtistä (tehtävänantoa vastaavaa) peräkkäin asetettua levyä, saadaan kaava $f(n) = 0,7^n$. Yo. tapauksessa $f(3) = 0,7^3 = 0,343$.

Käytännön esimerkki

Valon voimakkuus vähenee 30% sen kulkiessa 1 cm paksuisen muovilevyn läpi. Paljonko voimakkuus vähenisi, jos levyn paksuus olisi
a) 3 mm b) $5,4$ cm ?
Ratkaisu:
Eksponenttifunktio $f(x) = 0,7^x$ kuvaa valon voimakkuuden osuutta alkuperäisestä sen läpäistyä x cm paksuinen muovilevy.
a) $f(0,3) = 0,7^{0,3} \approx 0,90$, eli vähenisi noin 10%
b) Laske! $f(5,4) = 0,7^{5,4} \approx 0,15$, eli vähenisi noin 85%

Logaritmin määritelmä

Olkoon *kantaluku* $a > 0$, $a \neq 1$. Positiivisen luvun $y \in \mathbb{R}$ a-kantainen logaritmi $\log_a y$ on luku $x \in \mathbb{R}$, jolle $a^x = y$, siis

$$\log_a y = x \iff a^x = y.$$

Toisin sanoen

$$a^{\log_a y} = y,$$

eli $\log_a y$ on vastaus kysymykseen "Mihin potenssiin a täytyy korottaa jotta saadaan y?"
Esim. $\log_2 8 = 3$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$.
Logaritmille on voimassa seuraavat laskusäännöt: Kun $y, z > 0$ ja $a > 0$, $a \neq 1$,

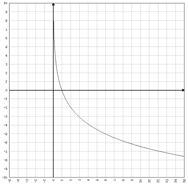
$$\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z, \quad \log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z, \quad \log_a(y^z) = z \log_a y.$$

Huom. koska $a^0 = 1$ ja $a^1 = a$, niin $\log_a 1 = 0$ ja $\log_a a = 1$.

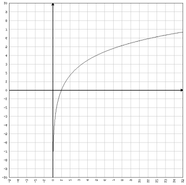
Logaritmifunktio

Määritellään kantaluvulle $a > 0$, $a \neq 1$, **logaritmifunktio**

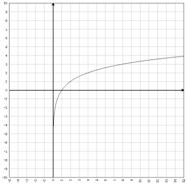
$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \log_a y$$



$a = 0,7$



$a = 1,5$



$a = 2$

Neperin luku

Kantalukuna käytetään usein ns. Neperin lukua

$$e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,72.$$

e on π:n ohella esimerkki paitsi irrationaalisesta, myös transsendenttisesta reaaliluvusta. Kantaluvun e logaritmia sanotaan luonnolliseksi logaritmiksi ja merkitään $\log_e y = \ln y$.

John Napier (1550-1617)

Esimerkkejä yhtälöistä

Ratkaistaan yhtälö

a) $5^{x^2+2x-1} \cdot 25 = 1 \iff 5^{x^2+2x-1} \cdot 5^2 = 1$
$\iff 5^{x^2+2x+1} = 1 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff x = -1$

b) $\log_a y^2 + \log_a 2y = \log_a 2 \iff 2\log_a y + \log_a 2 + \log_a y = \log_a 2$
$\iff 3\log_a y = 0 \iff \log_a y = 0 \iff y = 1$

c) $2^{2x+1} \cdot 5^{-x} = 3 \iff 2 \cdot 4^x \cdot (\frac{1}{5})^x = 3$
$\iff (\frac{4}{5})^x = \frac{3}{2} \iff x = \ln\frac{3}{2} / \ln\frac{4}{5} \iff x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 4 - \ln 5}$

Esimerkki yhtälöstä

Ratkaise yhtälö $3^{2x+1} = \frac{1}{9}$.

$$3^{2x+1} = \frac{1}{9} \iff 2x+1 = \log_3 \frac{1}{9} \iff 2x+1 = -2 \iff x = -\frac{3}{2}.$$

Kantaluvun vaihto

Usein on hyödyllistä tarkastella ongelmaa eri kantaisissa logaritmeissa, jolloin on tarpeen voida vaihtaa esimerkiksi a-kantaisesta logaritmista b-kantaiseen. Kantaluvun vaihto voidaan suorittaa seuraavan kaavan mukaan:

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}.$$

Todistetaan tämä:
Aina pätee (logaritmin määritelmän nojalla)

$$y = a^{\log_a y}.$$

Ottamalla b-kantaiset logaritmin puolittain saadaan

$$\log_b y = \log_b a^{\log_a y} = (\log_a y)(\log_b a) \iff \log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}.$$

Käytännön esimerkki

Kuten aikaisemmassa esimerkissä, oletetaan, että valon voimakkuus vähenee 30% sen kulkiessa 1 cm paksuisen muovilevyn läpi. Kuinka paksu levyn tulisi olla, jotta se päästäisi valosta lävitseen
a) 60%, b) 20% ?
Ratkaisu:
Kuten aiemmin, eksponenttifunktio $f(x) = 0,7^x$ kuvaa valon voimakkuuden osuutta alkuperäisestä sen läpäistyä x cm paksuinen muovilevy.
a)-kohdassa saamme siis yhtälön

$$f(x) = 0,6 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,7^x = 0,6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_{0,7} 0,6 = \frac{\ln 0,6}{\ln 0,7} \approx 1,4.$$

Levyn on siis oltava noin $1,4$ cm paksu.
Laske b)-kohta! Nyt

$$f(x) = 0,2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,7^x = 0,2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_{0,7} 0,2 = \frac{\ln 0,2}{\ln 0,7} \approx 4,5.$$

Levyn on siis oltava noin $4,5$ cm paksu.

Maanjäristykset ja Richterin asteikko

Maanjäristysten voimakkuutta voidaan mitata Richterin asteikkona tunnetulla logaritmisella asteikolla. Asteikko perustuu kymmenkantaiseen logaritmiin, minkä seurauksena yhden yksikön lisäys Richterin asteikolla tarkoittaa kymmenkertaista voimistumista (voimakkuudesta puhuminen on tietysti hieman epämääräsitä ja riippuu mitataanko energiaa vai jotain muuta).

Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika

Aikaa, joka kuluu, kun radioaktiivisen aineen (esim. radon, uraani) atomiytimistä puolet on hajonnut toisiksi atomiytimiksi, sanotaan *puoliintumisajaksi*. Puoliintumisaika on aineelle ominainen vakio ja puoliintumisajat vaihtelevatkin aineesta riippuen sekunnin murto-osista miljardeihin vuosiin.

Esimerkiksi ydinenergian tuotannossa käytettävä uraanin isotooppi ^{235}U puoliintuu noin 700 miljoonassa vuodessa.

Merkitään radioaktiivisen aineen puoliintumisaikaa kirjaimella T ja aineen alkuperäistä määrää kirjaimella N_0. Tällöin ajan t kuluttua radioaktiivisen aineen määrä on

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Yhtälöstä voidaan myös ratkaista puoliintumisaika T, jos tiedetään hajaantuvan aineen alkuperäinen määrä N_0 sekä aineen määrä N_t hetkellä t.

$$T = t \ln(2) / \ln(N_0/N_t).$$