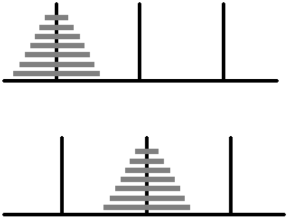
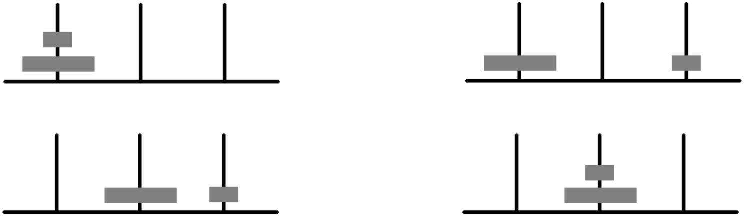
Hanoin tornit

Olkoot n kiekkoa asetettu kolmeen tankoon kuvan osoittamalla tavalla (kuvassa $n = 7$). Siirtämällä yhtä kiekkoa kerrallaan, kiekot on asetettava toiseen tankoon samaan järjestykseen. Isompaa kiekkoa ei missään vaiheessa saa asettaa pienemmän päälle. Mikä on pienin määrä tarvittavia siirtoja?



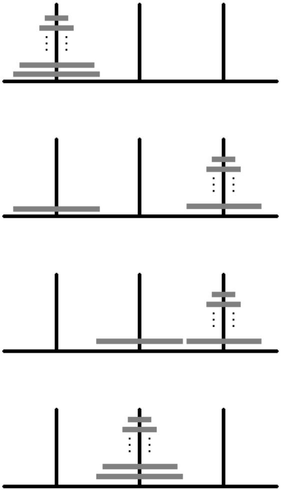
Hanoin tornit

Merkitään a_n:llä pienintä tarvittavaa määrää siirtoja n:lle kiekolle. Tietysti $a_1 = 1$. Helposti nähdään myös, että $a_2 = 3$:



Hanoin tornit

Entäpä a_n? Jotta pohjimmaista kiekkoa voitaisiin siirtää, täytyy yhden tangoista olla tyhjä ja muut $n-1$ kiekkoa siirrettynä kolmanteen tankoon. Tähän vaiheeseen päästäksemme tarvitsemme a_{n-1} siirtoa. Siirretään sitten isoin kiekko tyhjään tankoon. Tehdään lopuksi tarvittavat a_{n-1} siirtoa, jotta pienemmät kiekot saadaan isoimman päälle. Siis $a_n = 2a_{n-1} + 1$.



Hanoin tornit

Rekursiorelaatiosta $a_n = 2a_{n-1} + 1$ saamme tiedon $a_1 = 1$ avulla laskettua luvut a_n:

$a_1 = 1$,
$a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$,
$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$,
$a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$, ...

Näyttää siltä, että $a_n = 2^n - 1$. Todistetaan tämä:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + 2a_{n-1} \\
&= 1 + 2(1 + 2a_{n-2}) \\
&= 1 + 2 + 2^2 a_{n-2} \\
&= 1 + 2 + 2^2(1 + 2a_{n-3}) \\
&= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 a_{n-3} \\
&= \dots \\
&= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} a_1 \\
&= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}
$$

Legenda

Legendan mukaan maailmanloppu tulee, kun erään vietnamilaisen temppelin papit ovat saaneet siirrettyä yllä olevan pulman tavoin järjestetyt 64 kultaista kiekkoa tangosta toiseen. Ei kuitenkaan syytä huoleen, sillä vaikka papit siirtäisivät yhden kiekon sekunnissa, kuluisi heiltä tähän

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615 \quad \text{sekuntia}$$

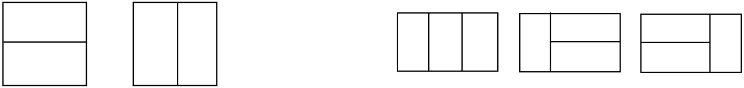
eli noin $5,82 \cdot 10^{11}$ vuotta!

Polun laatoitus

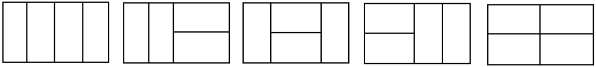
Polku on 2 metriä leveä ja n metriä pitkä. Se on tarkoitus laatoittaa $1m \times 2m$ laatoilla. Monellako eri tavalla tämä voidaan tehdä?

Ratkaisu:

Merkitään n metrin pituisen polun erilaisten laatoitusten lukumäärää p_n:llä. Selvästi $p_1 = 1$, sillä yksi laatta riittää. Huomataan lisäksi, että $p_2 = 2$ ja $p_3 = 3$.



Onko $p_n = n$? Ei, $p_4 = 5$:



Mikä p_n sitten on?

Polun laatoitus

$2 \times n$ kokoisen polun laatoitus täytyy aloittaa jommalla kummalla seuraavista tavoista:

Ensimmäisessä tapauksessa (vasen) se voidaan jatkaa loppuun p_{n-1} tavalla, kun taas toisessa tapauksessa (oikea) se voidaan jatkaa loppuun p_{n-2} tavalla. Siis summaperiaatteen mukaan $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$. Saatu rekursiorelaatio ottaa siis huomioon paitsi edellisen, myös sitä edellisen vaiheen. Voidaan laskea:

$p_5 = p_4 + p_3 = 5 + 3 = 8$,
$p_6 = p_5 + p_4 = 8 + 5 = 13$,
$p_7 = p_6 + p_5 = 13 + 8 = 21$, ja niin edelleen.

Fibonaccin jono

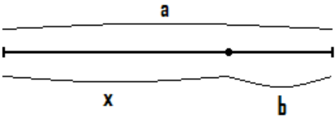
Saatua jonoa
$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots)$
sanotaan **Fibonaccin jonoksi** (alussa on yksi ykkönen lisää poikkeuksena edelliseen).
Tähän jonoon voi törmätä useissa paikoissa luonnossa!
Esim. kukkien terälehtien lukumäärissä:

3	liljat ja iirikset
5	akileijat, leinikit ja ritarinkannus
8	kukonkannus
13	keltainen päivänkakkara
21	asteri
34, 55	kaunokaiset

Leonardo Pisalainen alias Fibonacci

Kultainen suhde

Etsi annetulta janalta piste, joka jakaa janan kahteen osaan siten, että koko janan ja suuremman osan pituuksien suhde $\frac{a}{x}$ on sama kuin suuremman ja pienemmän osan pituuksien suhde $\frac{x}{b}$.



Kultainen suhde φ on suuremman ja pienemmän osan pituuksien suhde tässä *kultaisessa leikkauksessa*. Määritetään φ:n arvo:
Olkoon $b = 1$, jolloin $\varphi = x$ ja koko janan pituus $a = x + 1$. Nyt

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \iff \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \iff x + 1 = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0,$$

joten

$$\varphi = x = \frac{1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Kultainen suhde ja Fibonaccin jono

Tarkastelimme aikaisemmin Fibonaccin jonoa $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots)$ rekursiivisesti eli "askel kerrallaan". Voidaanko jonon luvut esittää *suljetussa muodossa*? Voidaan:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{missä} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Todistetaan tämä induktiolla:
Tapaus $n = 1$:

$$\frac{\varphi - (1-\varphi)}{\sqrt{5}} = \frac{2\varphi - 1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$$

Tapaus $n = 2$: (käytetään tietoa $\varphi^2 = \varphi + 1$ ja $(1-\varphi)^2 = 2 - \varphi$)

$$\frac{\varphi^2 - (1-\varphi)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi + 1 - (2-\varphi)}{\sqrt{5}} = \frac{2\varphi - 1}{\sqrt{5}} = 1 = F_2$$

Kultainen suhde ja Fibonaccin jono

Induktio-oletus:

$$F_k = \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}} \quad \text{kaikilla } k \le n, \quad n \ge 3$$

Induktioväite:

$$F_{n+1} = \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Todistetaan induktioväite:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \overset{i.o.}{=} \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1} - (1-\varphi)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

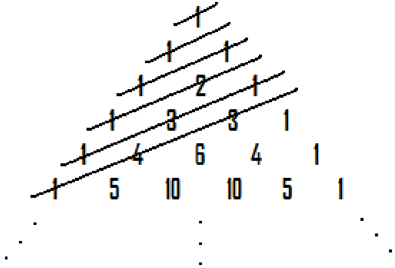
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n-1}\cdot\varphi^2 - (1-\varphi)^{n-1}(2-\varphi)\Big) \quad (\text{Muista: } \varphi+1 = \varphi^2 \text{ ja } 2-\varphi = (\varphi-1)^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n-1}(\varphi-1)^2\Big) = \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Induktioväite on siis tosi. Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \ge 1$.

Fibonaccin lukujono ja Pascalin kolmio

Lasketaan yhteen Pascalin kolmion *diagonaaleilla* olevat luvut:



1

1

$1 + 1 = 2$

$1 + 2 = 3$

$1 + 3 + 1 = 5$

$1 + 4 + 3 = 8$

Oikealle näyttäisi muodostuvan Fibonaccin lukujono! Kuinka tästä muotoillaan väite? Muista, että $\binom{n}{k}$ on Pascalin kolmion $n + 1$:nnen rivin $k + 1$:s luku. Näyttää siltä, että n:s Fibonaccin luku F_n saadaan laskemalla yhteen n:nnen rivin ensimmäinen luku $\binom{n-1}{0}$, sitä edeltävän rivin toinen luku $\binom{n-2}{1}$, edelleen sitä edeltävän rivin kolmas luku $\binom{n-3}{2}$, jne. kunnes luvut loppuvat.

Fibonaccin lukujono ja Pascalin kolmio

Väitämme siis, että

$$F_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k-1}{k} \quad \text{kaikilla} \quad n \geq 1.$$

Todistetaan tämä induktiolla.
Tapauksessa $n = 1$ on

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n-k-1}{k} = \binom{0}{0} = 1 = F_1,$$

eli väite pätee kun $n = 1$.
Tehdään induktio-oletus: Jollakin $n \geq 1$ on voimassa

$$F_m = \sum_{k \geq 0} \binom{m-k-1}{k}, \quad \text{kun} \quad m \leq n.$$

Todistetaan, että tällöin on voimassa induktioväite:

$$F_{n+1} = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}.$$

Fibonaccin lukujono ja Pascalin kolmio

Käyttämällä Fibonaccin lukujonon määritelmää ja induktio-oletusta saadaan

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k-1}{k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n-k-2}{k},$$

josta muuttamalla ensimmäisen termin summausindeksiä saadaan

$$= 1 + \sum_{k\geq 0} \binom{n-k-2}{k+1} + \sum_{k\geq 0} \binom{n-k-2}{k}.$$

Pascalin indentiteetin nojalla

$$= 1 + \sum_{k\geq 0} \binom{n-k-1}{k+1} = 1 + \sum_{k\geq 1} \binom{n-k}{k} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k}{k},$$

eli induktioväite on tosi. Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla $n \geq 1$.

Rekursiiviset määritelmät

Useat tähän mennessä esillä olleistä käsitteistä voidaan määritellä rekursiivisesti:

- Aritmeettinen jono: a_1 annettu, $a_{k+1} = a_k + d$, $k \geq 1$
- Geometrinen jono: a_1 annettu, $a_{k+1} = ra_k$, $k \geq 1$
- Kertoma: $1! = 1$, $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, $n \geq 1$
- Binomikertoimet: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $n \geq 0$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, $0 < k < n$