Luvut

Lähdetään liikkeelle kertaamalla mitä tiedämme luvuista.
Mitä erilaiset luvut kuvaavat ja millaisia ominaisuuksia niillä on?
Mikä voisi olla luonnollisin luku aloittaa?

Luonnolliset luvut

Luonnolliset luvut $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

- kuvaavat lukumääriä.
- ovat järjestyksessä.
  Esim. $1 < 2$, $473 > 28$, $0 \leq$ mikä tahansa luonnollinen luku
- Ei ole suurinta luonnollista lukua!
- Aina löytyy suuruusjärjestyksessä seuraava.
  Esim. luku 3 seuraa lukua 2.
- Kertolasku/summaus luonnollisten lukujen kesken tuottaa luonnollisen luvun!

Yhtälön $x + 2 = 5$ ratkaisee luonnollinen luku $x = 3$.
Entä $x + 2 = 1$? Ratkaisu $x = -1$ ei ole luonnollinen luku!

Kokonaisluvut

Kokonaisluvut $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

- kuvaavat positiivisia (> 0) ja negatiivisia (< 0) "lukumääriä".
  Esim. lämpöasteet $+5^\circ C$ tai $-13^\circ C$.
- ovat järjestyksessä.
  Esim. $-3 < -1$ ja $-1 < 2$, tai lyhyemmin $-3 < -1 < 2$.
- Ei ole suurinta eikä pienintä kokonaislukua.
- Aina löytyy suuruusjärjestyksessä seuraava.
  Esim. lukua -5 seuraa luku -4.
- Kertolasku/summaus kokonaislukujen kesken tuottaa kokonaisluvun!

Yhtälön $3x = 6$ ratkaisee luonnollinen luku $x = 2$, kun taas yhtälön $2x = -4$ ratkaisee kokonaisluku $x = -2$.
Entä $2x = 1$ tai $-3x = 2$? Ratkaisut $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -\frac{2}{3}$ eivät ole kokonaislukuja!

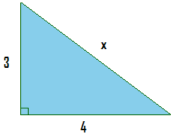
Rationaaliluvut

Rationaaliluvut $\frac{m}{n}$, missä osoittaja m ja nimittäjä n ovat kokonaislukuja , $n \neq 0$

- kuvaavat "osia kokonaisista" , esim. puolikas $\frac{1}{2}$ tai viidesosa $\frac{1}{5}$.
- ovat järjestyksessä , esim. $\frac{1}{2} < \frac{5}{3}$.
- Ei ole pienintä eikä suurinta rationaalilukua.
- Ei löydy suuruusjärjestyksessä seuraavaa: Kahden rationaaliluvun välissä on aina rationaalilukuja!
- Esitys $\frac{m}{n}$ ei ole yksikäsitteinen , esim. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.
- Rationaalilukujen desimaalikehitelmät ovat päättyviä tai jaksollisia , esim.
  $\frac{5}{4} = 1,25$; $\frac{3}{22} = 0,13636\ldots = 0,1\overline{36}$
  Etsi desimaalikehitelmä luvulle $\frac{5}{3}$. $\frac{5}{3} = 1,666\ldots = 1,\overline{6}$
  Entäpä toiseen suuntaan?
  $0,03 = \frac{3}{100}$, $1,\overline{3} = 1,333\ldots = \frac{4}{3}$, $0,1\overline{24} = 0,12424\ldots = \frac{41}{330}$
  Esitä luku $0,1\overline{6}$ muodossa $\frac{m}{n}$. $0,1\overline{6} = \frac{1}{6}$
  Huomaa vielä: $0,\overline{9} = 0,999\ldots = 1$.

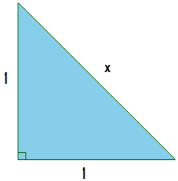
Pituuksista

Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituuden neliö on yhtäsuuri kuin kateettien pituuksien neliöiden summa. Tarkastellaan kolmiota



Hypotenuusalle x pätee siis $x^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Koska $5^2 = 25$, hypotenuusan pituudeksi saadaan $x = 5$.

Entäpä kolmio



Saadaan yhtälö $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Ratkaisua ei löydy luonnollisista luvuista, eikä edes rationaaliluvuista! Täytyyhän hypotenuusan pituuden olla jokin luku , merkitään sitä $\sqrt{2}$:lla.

Irrationaaliluvut

$\sqrt{2}$ on esimerkki **irrationaaliluvusta**, eli luvusta joka ei ole rationaaliluku (ts. ei ole muotoa $\frac{m}{n}$). Miten tämä voidaan todistaa?
On huomattavasti helpompi todistaa, että esim. luku $0,1\overline{6}$ on rationaalinen ; riittää vain laskea sille esitys $\frac{1}{6}$.
$\sqrt{2}$ on kuitenkin **algebrallinen luku**, eli jonkin kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön (tässä tapauksessa yhtälön $x^2 - 2 = 0$) juuri.
Kaikki rationaaliluvut ovat algebrallisia:
Mielivaltainen rationaaliluku $\frac{m}{n}$ on kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön $nx - m = 0$ ratkaisu.
On olemassa irrationaalilukuja, jotka eivät ole algebrallisia, vaan ns. **transsendenttisia**!
Esim. π ei ole minkään kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön ratkaisu. Miten tämä voidaan todistaa?

Reaaliluvut

Reaaliluvut saadaan rationaaliluvuista lisäämällä niihin kaikki irrationaaliluvut.

- Reaalilukuja voidaan ajatella lukusuorana.
- reaalilukujen desimaalikehitelmät voivat olla päättymättömiä ja jaksottomia (näin on aina irrationaaliluvuilla!)
  Esim. $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$
  $\pi = 3,14159265358979323\ldots$
- Reaaliluvut ovat järjestyksessä.
- Ei ole pienintä eikä suurinta reaalilukua!
- Ei löydy suuruusjärjestyksessä seuraavaa!

Voitaisiin jatkaa kysymällä ratkaisua yhtälölle $x^2 = -1$, jolloin joudutaan ottamaan käyttöön *kompleksiluvut* (yo. yhtälön ratkaisee ns. imaginaariyksikkö $i \equiv \sqrt{-1}$).

Potenssimerkintä ja neliöjuuri

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Reaaliluvulle x käytetään potenssimerkintää

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kpl}}$$

ja mikäli $x \neq 0$, niin myös

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Esim. $10^4 = 10000$ ja $2^{-3} = \frac{1}{8}$.
Lisäksi on sovittu, että $x^0 = 1$.
Jokaisella reaaliluvulla $y \geq 0$ on myös olemassa n**:s juuri** eli reaaliluku $x \geq 0$, jolle pätee

$$x^n = y.$$

Merkitään $x = \sqrt[n]{y}$. Tapauksessa $n = 2$ puhumme neliöjuuresta ja merkitään $x = \sqrt{y}$.
Esim. $\sqrt[3]{27} = 3$ ja $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Lukujärjestelmät

Reaalilukuja voidaan tarkastella eri lukujärjestelmissä valitsemalla eri kantalukuja. Käyttämämme 10-järjestelmä on vain sopimus! (Sormiemme lukumäärä voi vaikuttaa tähän.)

- desimaalijärjestelmä, eli 10-järjestelmä:
  kantaluku 10, numerot $0, 1, \ldots, 9$,
  esim. $368,5 = 368,5_{10} = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}$
- binäärijärjestelmä, eli 2-järjestelmä:
  kantaluku 2, numerot 0 ja 1,
  esim. $10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 22_{10}$
- 8-järjestelmä:
  kantaluku 8, numerot $0, 1, \ldots, 7$,
  esim. $132,4_8 = 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^{-1} = 90,5_{10}$
- heksadesimaalijärjestelmä, eli 16-järjestelmä:
  kantaluku 16, numerot $0, 1, \ldots, 9$, $A(= 10)$, $B(= 11)$, $\ldots$, $F(= 15)$
  esim. $4A0EF2_{16} =$
  $4 \cdot 16^5 + 10 \cdot 16^4 + 0 \cdot 16^3 + 14 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 4853490_{10}$

Siirtyminen lukujärjestelmästä toiseen

Esim.
Muunna 37_{10} binäärijärjestelmään!
On siis lausuttava luku 37_{10} kantaluvun 2 joidenkin potenssien summana.
Katsotaanpa ensin noita potensseja:
$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$.
Lähdetään liikkeelle suurimmista potensseista

$$37 = 32+5 = 32+4+1 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 100101_2$$

Siirtyminen lukujärjestelmästä toiseen

Esim.
Muunna $2B_{16}$ 8-järjestelmään!
Muunnetaan ensin desimaalijärjestelmään:

$$2B_{16} = 2 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 43$$

Kantaluvun 8 potenssit: $8^0 = 1$, $8^1 = 8$, $8^2 = 64$.
Luku 43_{10} on nyt lausuttava kantaluvun 8 potenssien avulla , huomaa että kukin potenssi voi esiintyä $0, 1, \ldots, 6$ tai 7 kertaa:

$$43 = 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 53_8$$

Näissä esimerkeissä sovellettiin ns. jakoalgoritmia, johon emme nyt kuitenkaan tarkemmin perehdy.

Yhtälöt

Palautetaan lopuksi mieliin 1. ja 2. asteen yhtälöihin ja niiden ratkaisuun liittyvät perusasiat.

Ensimmäisen asteen yhtälö

Yhtälöä, joka on muotoa
$ax + b = cx + d$, missä a, b, c ja d ovat reaalilukuja ja $a \neq c$,
sanotaan ensimmäisen asteen yhtälöksi.
Se on helppo ratkaista vähentämällä puolittain b ja cx , jolloin se tulee muotoon

$$(a - c)x = d - b$$

eli tuntematonta x sisältävät termit on saatu yhtälön vasemmalle puolelle ja muut termit oikealle. Jakamalla sitten $(a - c)$:llä (huom. $a - c \neq 0$) saadaan ratkaisu

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

Intialainen esimerkki

Tarkastellaan esimerkkiä intialaisen Bhaskara II Acharyan teoksesta ”Vija Ganita” 1100-luvulta:
”Mehiläisparvesta istuu viidennes kadambakukalle, kolmannes silindrikukalle; kolme kertaa niin paljon kuin noiden kahden erotus lentää kutajakukalle. Yksi mehiläinen, joka oli jäljellä, liitelee sinne tänne ilmassa jasmiinin ja pandanuksen makean tuoksun houkuttelemana. Sano minulle, armas neitonen, mehiläisten lukumäärä.”
Ratkaisu:
Merkitsemme x:llä parven mehiläisten lukumäärää. Saamme yhtälön

$$x - \left(\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3(\frac{x}{3} - \frac{x}{5})\right) = 1.$$

Ratkaise tämä!

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
& x-\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)\right)=1 \\
\iff & x-\left(\frac{8x}{15}+3\left(\frac{2x}{15}\right)\right)=1 \\
\iff & x-\left(\frac{8x}{15}+\frac{6x}{15}\right)=1 \\
\iff & x-\frac{14x}{15}=1 \\
\iff & \frac{x}{15}=1 \\
\iff & x=15
\end{aligned}
$$

Mehiläisiä on siis 15.

Esimerkki 2

Ratkaise seuraava tehtävä Bhaskara I Acharyan kirjasta ”Lilivati”: ”Joukko puhtaita lotuskukkia uhrattiin jumalille. Shivalle uhrattiin koko määrästä kolmannes, Vishnulle viidennes ja Auringolle kuudennes sekä Bhavanille neljännes. Loput, yhdeksän lotuskukkaa, annettiin kunnianarvoiselle bramiinille. Sano pian kukkien koko luku!”

Ratkaisu:
Merkitään x:llä kukkien lukumäärää. Shivalle uhrattiin siis $\frac{1}{3}x$ kukkaa, Vishnulle $\frac{1}{5}x$ kukkaa, Auringolle $\frac{1}{6}x$ kukkaa ja Bhavanille $\frac{1}{4}x$ kukkaa. Jäljelle jäi 9 kukkaa, joten ratkaisemme yhtälön

$$\begin{aligned}
& x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{4}x = 9 \\
\iff & x - \left(\frac{20}{60}x + \frac{12}{60}x + \frac{10}{60}x + \frac{15}{60}x\right) = 9 \\
\iff & x - \frac{57}{60}x = 9 \\
\iff & \frac{1}{20}x = 9 \\
\iff & x = 180.
\end{aligned}$$

Kukkia oli siis 180 kappaletta.

Muistikaavat

Seuraavat kaavat on hyvä pitää mielessä mm. korkeampiasteisia yhtälöitä ratkoessa:
Olkoot a ja b reaalilukuja. Tällöin

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, joka on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$, b ja c ovat reaalilukuja.
Sen ratkeavuus ja ratkaisujen lukumäärä riippuvat sen **diskriminantista** $D = b^2 - 4ac$:

- Jos $D < 0$, niin yhtälöllä ei ole (reaalisia) ratkaisuja.
- Jos $D = 0$, niin yhtälöllä on yksi ratkaisu $x = -\frac{b}{2a}$.
- Jos $D > 0$, niin yhtälöllä on kaksi ratkaisua

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esimerkkejä toisen asteen yhtälöistä

- $x^2 + x + 1 = 0$
  Tarkastellaan diskriminanttia: $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$
  Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja.
- $x^2 - 2x + 1 = 0$
  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$
  Yhtälöllä on siis yksi ratkaisu $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.
  Tämä nähdään myös muistikaavaa apuna käyttäen:
  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.
- $x^2 - x - 2 = 0$
  $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$
  Yhtälöllä on siis kaksi ratkaisua

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \iff x = 2 \text{ tai } x = -1.$$

Esimerkki

Farmari rakentaa lampaalleen suorakulmion muotoisen 15 neliömetrin aitauksen, jonka pidempi sivu on 2 metriä pidempi kuin lyhyempi sivu. Montako metriä aitaa hän tarvitsee?
Ratkaisu:

Merkitään x:llä aitauksen lyhyemmän sivun pituutta metreissä. Koska aitaus on muodoltaan suorakulmio, jonka pinta-ala on 15 neliömetriä, saadaan yhtälö $x(x+2) = 15$. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $x^2 + 2x - 15 = 0$ ja ratkaista ratkaisukaavalla:

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 + 8}{2} = 3.$$

Aitaa tarvitaan siis $2x + 2(x+2) = 6 + 10 = 16$ metriä.