Logiikka

Tutustumme seuraavaksi propositio- eli lauselogiikkaan, jossa tarkastellaan formaalien lauseiden ominaisuuksia, ennenkaikkea niiden totuusarvoja. Formalisoimalla luonnollisen kielen lauseet propositiologiikan kielelle on helppo tarkastella monimutkaisiakin lauseita. Eräs merkittävimmistä loogikoista oli itävaltalais-amerikkalainen Kurt Gödel, joka tunnetaan parhaiten syvällisistä ja käänteentekevistä "epätäydellisyyslauseistaan". Näihin tuloksiin voi tutustua matemaattisen logiikan syventävillä kursseilla.

Kurt Gödel (1906-1978)

Propositiosymbolit ja konnektiivit

Propositio eli lause koostuu jakamattomista väittämistä (propositiosymboleista)
kuten $A =$ "sataa" ja $B =$ "tuulee" sekä niitä yhdistävistä **konnektiiveista** :

negaatio	$\neg A$	"ei A" ("ei sada")
konjunktio	$A \wedge B$	"A ja B" ("sataa ja tuulee")
disjunktio	$A \vee B$	"A tai B" ("sataa tai tuulee")
implikaatio	$A \rightarrow B$	"jos A, niin B" ("jos sataa, niin tuulee")
ekvivalenssi	$A \leftrightarrow B$	"A jos ja vain jos B" ("sataa jos ja vain jos tuulee")

Sulkeet ja sidontajärjestys

Konnektiivien välinen sidontajärjestys:

1. $\neg$ on vahvin
2. $\wedge$ ja $\vee$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$
3. $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat

Konnektiiveista vahvin sitoo argumenttinsa ensin. (Vertaa laskutoimitukset $2 + 3 \cdot 5 = 2 + (3 \cdot 5)$!) Esimerkiksi

- $\neg A \wedge B$ tarkoittaa samaa kuin $(\neg A) \wedge B$, ei $\neg(A \wedge B)$
- $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ tarkoittaa samaa kuin $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$, ei $A \wedge (B \rightarrow B) \vee C$
- sulkeita ei voi poistaa lauseesta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$ ilman, että merkitys muuttuu

Konjunktioiden ja disjunktioiden ketjutus

Ketjutettaessa konjunktioita tai disjunktioita voidaan sulkeet jättää pois:

- $(A \wedge B) \wedge C$ tarkoittaa samaa kuin $A \wedge (B \wedge C)$, joten voimme kirjoittaa kyseisen proposition ilman sulkeita $A \wedge B \wedge C$
- $(A \vee B) \vee C$ tarkoittaa samaa kuin $A \vee (B \vee C)$, joista kirjoitamme $A \vee B \vee C$

Sulkeita ei kuitenkaan voi jättää pois molempia $\wedge$ ja $\vee$ sisältävistä propositioista!
$(A \wedge B) \vee C$ ei tarkoita samaa kuin $A \vee (B \wedge C)$!

Luonnollisen kielen lauseiden formalisointi

Luonnollisen kielen lauseen formalisointi etenee kahdessa vaiheessa:

- tunnistetaan "jakamattomat väittämät"
- tunnistetaan konnektiivit

Esim.

"On pilvistä	ja	ajan autoa."
A	$\wedge$	B

"Jos on pilvistä,		ajan autoa."
A	$\rightarrow$	B

"En aja autoa,		jos ei ole pilvistä."
$\neg A$	$\rightarrow$	$\neg B$

Totuusarvot

Propositiolla on **totuusarvo** 1 (tosi) tai 0 (epätosi).
Konnektiivien totuusarvotaulukko:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Esimerkki totuusarvoista

Millä propositioiden A ja B totuusarvoilla lause $\neg(A \vee \neg B)$ on tosi?

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\neg(A \vee \neg B)$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

$\neg(A \vee \neg B)$ on siis tosi täsmälleen silloin, kun A on epätosi ja B on tosi.

Toinen esimerkki totuusarvoista

Millä propositioiden A, B ja C totuusarvoilla lause $A \to B \wedge C$ on epätosi?

A	B	C	$B \wedge C$	$A \to B \wedge C$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

$A \to B \wedge C$ on siis epätosi täsmälleen silloin, kun A ja B ovat tosia ja C epätosi , tai kun A ja C ovat tosia ja B on epätosi , tai kun A on tosi ja B ja C ovat epätosia.

Tehtävä totuusarvoista

Millä propositioiden A ja B totuusarvoilla lause $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B$ on tosi?
Ratkaisu:
Kyseisen proposition totuustaulu on

A	B	$\neg B$	$A \leftrightarrow \neg B$	$A \wedge B$	$(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1

Propositio $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B$ on siis tosi täsmälleen silloin kun A:lla ja B:llä on sama totuusarvo.

Aarne, Boris ja Camilla

Tiedetään, että yksi kolmesta epäillystä (Aarne, Boris ja Camilla) on syyllinen rikokseen. Tiedetään lisäksi, että syyttömät puhuvat totta ja syylliset valehtelevat. Kuulusteluissa sanottua:

- Aarne: "Minä olen syyllinen tai Camilla on syyllinen."
- Boris: "Syyllinen en ole minä eikä Aarne."
- Camilla: "Aarne on syyllinen tai Boris on syyllinen."

Kuka on syyllinen?
Ratkaisu:
$A =$ "Aarne on syytön."
$B =$ "Boris on syytön."
$C =$ "Camilla on syytön."

Aarnen tunnustus:	$\neg A \vee \neg C$
Boriksen tunnustus:	$A \wedge B$
Camillan tunnustus:	$\neg A \vee \neg B$

Aarne, Boris ja Camilla

Laaditaan totuustaulu. Kaikkia vaakarivejä ei tarvita, sillä täsmälleen yksi on syyllinen:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg A \vee \neg C$	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1

Syyllinen valehtelee ja syyttömät puhuvat totta. Etsitään siis vaakarivi, jolla A:lla on sama totuusarvo kuin Aarnen tunnustuksella , B:llä sama totuusarvo kuin Boriksen tunnustuksella ja C:llä sama totuusarvo kuin Camillan tunnustuksella. Ensimmäinen vaakarivi on sellainen, joten Camilla on syyllinen.

Arvoitus

There is an island upon which a tribe resides. The tribe consists of 1000 people, with various eye colours. Yet, their religion forbids them to know their own eye color, or even to discuss the topic; thus, each resident can (and does) see the eye colors of all other residents, but has no way of discovering his or her own (there are no reflective surfaces). If a tribesperson does discover his or her own eye color, then their religion compels them to commit ritual suicide at noon the following day in the village square for all to witness. All the tribespeople are highly logical and devout, and they all know that each other is also highly logical and devout (and they all know that they all know that each other is highly logical and devout, and so forth).

[For the purposes of this logic puzzle, "highly logical" means that any conclusion that can logically deduced from the information and observations available to an islander, will automatically be known to that islander.]

Of the 1000 islanders, it turns out that 100 of them have blue eyes and 900 of them have brown eyes, although the islanders are not initially aware of these statistics (each of them can of course only see 999 of the 1000 tribespeople).

One day, a blue-eyed foreigner visits to the island and wins the complete trust of the tribe.

One evening, he addresses the entire tribe to thank them for their hospitality.

However, not knowing the customs, the foreigner makes the mistake of mentioning eye color in his address, remarking "how unusual it is to see another blue-eyed person like myself in this region of the world".

What effect, if anything, does this faux pas have on the tribe?

Arvoituksen ratkaisu

Todistetaan hieman yleisempi väite:
Jos saarella asuvista n on sinisilmäisiä, niin n päivän kuluttua matkailijan ilmoituksesta he kaikki surmaavat itsensä.

- Jos $n = 1$, niin ainoa sinisilmäinen asukas ei näe yhtään sinisilmäistä ja ymmärtää siten matkailijan viittaavan itseensä.
- Jos $n = 2$, niin kumpikin sinisilmäinen asukas näkee yhden sinisilmäisen ja päättelee:
  ”Jos silmäni ovat ruskeat, on saarella vain yksi sinisilmäinen. Tämä sinisilmäinen surmaa itsensä seuraavana päivänä pääteltyään silmiensä värin.”
  Kumpikaan sinisilmäisistä ei kuitenkaan surmaa itseään seuraavana päivänä, joten kumpikin voi päätellä silmiensä olevan siniset!
- Jos $n = 3$, niin kukin sinisilmäinen asukas näkee kaksi sinisilmäistä ja päättelee:
  ”Jos silmäni ovat ruskeat, on saarella kaksi sinisilmäistä. Nämä sinisilmäiset surmaavat itsensä kahden päivän kuluttua pääteltyään silmiensä värin.”
  Kukaan sinisilmäisistä ei kuitenkaan surmaa itseään kahden päivän kuluttua, joten kaikki sinisilmäiset voivat päätellä silmiensä värin.

Arvoituksen ratkaisu

Väite voidaan todistaa yleisessä tapauksessa induktiolla:
Tapaus $n = 1$ katsottiin jo.
Oletetaan, että väite pätee kun sinisilmäisiä on $n - 1$ ja tarkastellaan tilannetta, jossa sinisilmäisiä on n.
Nyt jokainen sinisilmäinen näkee $n - 1$ sinisilmäistä ja päättelee:
"Jos silmäni ovat ruskeat, on saarella $n - 1$ sinisilmäistä. Nämä sinisilmäiset surmaavat itsensä $n - 1$ päivän kuluttua pääteltyään silmiensä värin."
Kukaan sinisilmäisistä ei kuitenkaan surmaa itseään $n - 1$ päivän kuluttua, joten kaikki sinisilmäiset voivat päätellä silmiensä värin.
Induktioväite on siis tosi ja induktioperiaatteen mukaan väite pätee kaikilla n, erityisesti tapauksessa $n = 100$.

Tautologia

Propositio on **tautologia**, jos sen totuusarvo on 1 kaikilla siinä esiintyvien propositiosymbolien totuusarvoilla. Tautologioita ovat esimerkiksi

- $A \vee \neg A$ (poissuljetun kolmannen laki)
- $\neg(A \wedge \neg A)$ (poissuljetun ristiriidan laki)
- $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ (modus ponens)
- $A \wedge (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B$ (reductio ad absurdum)

Totea näistä valitsemasi propositio tautologiaksi!

Looginen ekvivalenssi

Propositiot A ja B ovat **loogisesti ekvivalentit**, merkitään $A \equiv B$, jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia , ts. jos A ja B eivät eroa toisistaan totuusarvojen suhteen. Loogisia ekvivalensseja ovat esimerkiksi

- $\neg(\neg A) \equiv A$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
- $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Totea näistä valitsemasi looginen ekvivalenssi!

Konnektiivien keskinäinen määriteltävyys

Negaatio yhdessä minkä tahansa konnektiivin $\wedge$, $\vee$ tai $\rightarrow$ kanssa riittää määrittelemään muut. Sovelletaan edellä esitettyjä loogisia ekvivalensseja.

Negaatio ja konjunktio

$$A \vee B \equiv \neg(\neg(A \vee B)) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$$

Negaatio ja disjunktio

$$A \land B \equiv \neg(\neg(A \land B)) \equiv \neg(\neg A \lor \neg B)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \equiv \neg(\neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B \lor A))$$

Negaatio ja implikaatio

$$A \land B \equiv \neg(A \to \neg B)$$

$$A \lor B \equiv \neg A \to B$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A) \equiv \neg((A \to B) \to \neg(B \to A))$$